

# 1.2 Problems

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

series (6). Recently, Krieg [24] gave a more elementary proof of (some of) the results of [38] using well-known properties of Epstein zeta functions. However, it is clear from the  $\Gamma$ -factors and the type of the functional equations that for  $n > 2$  there cannot be any direct connection between the series studied in [24, 38] and spinor zeta functions.

## 1.2 PROBLEMS

i) Suppose that  $k$  is even. If  $F$  is a non-zero Hecke eigenform in  $S_k(\Gamma_2)$ , is  $\phi_1 \neq 0$ ? (This question was already asked in [33].) The answer is positive for  $k \leq 32$  as numerical computations due to Skoruppa [35] show. Note that by Theorem 2 a positive answer gives a new proof for the analytic continuation and the functional equation of  $Z_F(s)$ .

ii) Let  $F$  be a Hecke eigenform in  $S_k(\Gamma_2)$ . The only critical point of  $Z_F(s)$  in Deligne's sense is  $s = k - 1$ , i.e. the center of symmetry of the functional equation as is easily checked. Conjecturally therefore  $Z_F(k - 1)$  should be equal to the determinant of a "period matrix" times an algebraic number (one may suppose that  $k$  is even since otherwise  $Z_F(k - 1) = 0$  as follows from the sign in the functional equation). To the author's knowledge, nothing so far in this direction has been proved. Could Theorem 2 eventually be useful in this context?

As a side remark, let us mention here that Böcherer [4] motivated by Waldspurger's results [37] about the central critical values of quadratic twists of Hecke  $L$ -functions of elliptic Hecke eigenforms, for  $k$  even has conjectured that the central critical value of the twist of  $Z_F(s)$  by a quadratic Dirichlet character of conductor  $D < 0$  should be proportional to the *square* of

$\sum_{\{T > 0\} / \sim, \text{disc } T = D} a(T)$  where  $a(T)$  are the Fourier coefficients of  $F$  and the

sum is over a set of  $\Gamma_1$ -representatives of positive definite integral binary quadratic forms  $T$  of discriminant  $D$ . This conjecture is true if  $F$  is in the Maass space as follows from Theorem 2 in §2 in connection with Waldspurger's results, cf. [4]. The conjecture when generalized to level  $> 1$  is also true if the corresponding form has weight 2 and is the Yoshida lift of two elliptic cusp forms [6].

iii) Let  $F$  be a cuspidal Hecke eigenform and assume that  $F$  is in  $S_k^*(\Gamma_2)^\perp$  if  $k$  is even. Does the function  $D_{F,F}(s)$  have any intrinsic arithmetical meaning? (This question was already asked in [33], too; note that  $D_{F,F}(s)$  for  $F$  as above cannot be proportional to  $Z_F(s)$  since  $D_{F,F}(s)$  has a pole at  $s = k$  while  $Z_F(s)$  is holomorphic there, cf. §2). For some numerical computations in this direction in the case  $k = 20$  (the first case where  $S_k^*(\Gamma_2)^\perp \neq \{0\}$ ) we refer to [23].