I. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Cet article répond à certaines questions posées dans [8]. Pour la commodité du lecteur, dans la première partie, les résultats de [8] sont repris, et dans certains cas précisés.

I. Introduction

On désigne dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5 par F le groupe libre à deux générateurs, a et b. On note $\operatorname{tr} A$ la trace de la matrice carrée A. Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbf{C})$, on note $T\varphi$ le triplet $(\operatorname{tr} \varphi(a), \operatorname{tr} \varphi(b), \operatorname{tr} \varphi(ab))$.

L'image de T est $\mathbf{C}^3$ tout entier: pour s'en persuader, il suffit de considérer les φ tels que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & y \end{pmatrix}$.

Si σ et σ' sont des endomorphismes de F, on pose $\sigma\sigma' = \sigma' \circ \sigma$. On identifiera un élément σ de $\operatorname{Hom}(F, F)$ au couple $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F \times F$.

Si w est un élément de F, on désignera par $\tilde{w}$ l'élément de $\mathbf{Z}^2$, image de w par l'homomorphisme d'abélianisation. Si σ est un endomorphisme de F, il définit, par abélianisation, un endomorphisme de $\mathbf{Z}^2$ dont nous désignerons par $\tilde{\sigma}$ la matrice transposée. En d'autres termes, $\tilde{\sigma}$ est la matrice carrée indexée par $\{a, b\} \times \{a, b\}$ dont les coefficients d'interprètent de la façon suivante: si u et v appartiennent à $\{a, b\}$, $\tilde{\sigma}_{u,v}$ = somme des puissances de la lettre v dans $\sigma(u)$. On a évidemment $(\sigma\sigma')^{\sim} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$.

On note λ le polynôme $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$. On sait que, pour $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, $\lambda(T\varphi)$ est nul si et seulement si $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune.

LEMME 1. *Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbf{C})$. On a*

$$AB + BA = \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A .$$

Démonstration. Le théorème de Cayley-Hamilton donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \operatorname{tr} A - A \\ B^{-1} &= \operatorname{tr} B - B \\ (AB)^2 &= AB \operatorname{tr}(AB) - 1 . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} BA &= A^{-1}ABABB^{-1} \\ &= A^{-1}(AB \operatorname{tr}(AB) - 1)B^{-1} \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A - A)(\operatorname{tr} B - B) \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A - AB . \end{aligned}$$

LEMME 2. *Soit* $w \in F$. *Il existe alors quatre polynômes,*

$$P_w^{(j)} \in \mathbf{Z}[x, y, z] \ (j = 1, 2, 3, 4) ,$$

tels que, pour tout $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, *on ait*

$$\varphi(w) = P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi)\varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi)\varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi)\varphi(ab) .$$

Démonstration. Posons, pour simplifier, $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$ et $T\varphi = (x, y, z)$. On a alors, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme précédent,

$$\begin{aligned} A^2 &= xA - 1 \\ A^{-1} &= x - A \\ B^2 &= yB - 1 \\ B^{-1} &= y - B \\ BA &= z - xy + yA + xB - AB . \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} ABA &= \mathrm{A}(z - xy + yA + xB - AB) \\ &= A[z - yA^{-1} + xA^{-1}B] \\ &= -y + zA + xB . \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors de ces formules par récurrence sur la longueur de w, supposé réduit.

PROPOSITION 3. *Soit* $w \in F$. *Il existe alors un unique polynôme* $P_w \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ *tel que, pour tout* $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, *on ait*

$$\operatorname{tr} \varphi(w) = P_w(T\varphi) .$$

Démonstration. L'existence résulte du lemme précédent:

$$\operatorname{tr} \varphi(w) = 2P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi) \operatorname{tr} \varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi) \operatorname{tr} \varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi) \operatorname{tr} \varphi(ab) .$$

L'unicité résulte de la surjectivité de T.

Cette proposition, avec une démonstration légèrement différente, figure dans [1].

THÉORÈME 4. *Soit* $\sigma \in \operatorname{Hom}(F, F)$. *Il existe alors un unique* $\Phi_\sigma \in (\mathbf{Z}[x, y, z])^3$ *tel que, pour tout* $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ *on ait*

$$T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi) .$$

Démonstration. Cela résulte simplement de la proposition précédente, appliquée aux éléments $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ et $\varphi(ab)$ de F.

PROPOSITION 5. *Quels que soient* σ_1 *et* σ_2 *dans* $\mathrm{Hom}(F, F)$, *on a*

$$\Phi_{\sigma_1\sigma_2} = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2} .$$

Démonstration. On a

$$T(\varphi \circ \sigma_2 \circ \sigma_1) = \Phi_{\sigma_1}(T(\varphi \circ \sigma_2)) = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}(T\varphi) ,$$

d'où le résultat à cause de l'unicité de $\Phi_{\sigma_1\sigma_2}$.

PROPOSITION 6. *Quels que soient* $w \in F$ *et* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$, *on a*

$$P_{\sigma(w)} = P_w \circ \Phi_\sigma .$$

Démonstration. Soit σ' l'élément de $\mathrm{Hom}(F, F)$ ainsi défini: $\sigma'(a) = w$, $\sigma'(b) = b$. Alors P_w et $P_{\sigma(w)}$ sont les premières composantes de $\Phi_{\sigma'}$ et de $\Phi_{\sigma'\sigma}$ respectivement. Or $\Phi_{\sigma'\sigma} = \Phi_{\sigma'} \circ \Phi_\sigma$, d'où le résultat.

THÉORÈME 7. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$. *Il existe alors un polynôme* $Q_\sigma \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ *tel que l'on ait* $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ tel que $\lambda(T\varphi) = 0$. Alors $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune. Il en est donc de même de $\varphi(\sigma(a))$ et de $\varphi(\sigma(b))$. Par suite $\lambda(\varphi_\sigma(T\varphi)) = 0$.

L'existence de Q_σ avait été conjecturée dans [3] et prouvée dans [8].

PROPOSITION 8. *Si* σ_1 *et* σ_2 *sont deux éléments de* $\mathrm{Hom}(F, F)$ *on a*

$$Q_{\sigma_1\sigma_2} = Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2} .$$

Démonstration. On a

$$\lambda \circ \Phi_{\sigma_1\sigma_2} = (\lambda \circ \Phi_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = (\lambda \cdot Q_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = \lambda \cdot Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2} .$$

PROPOSITION 9. *Si* w *et* w' *sont deux éléments de* F *tels que* $\tilde{w} = \tilde{w}'$, *alors* $P_w - P_{w'}$ *est divisible par* λ.

Démonstration. Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbf{C})$ tel que $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune, on a $P_w(T\varphi) = P_{w'}(T\varphi)$, comme on peut le voir en trigonalisant simultanément $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Par suite le polynôme $P_w - P_{w'}$ s'annule sur les zéros de λ.

Soit Ω la variété des zéros de λ. Le théorème 7 dit que Ω est stable par tout Φ_σ. La proposition 9 dit que la restriction de Φ_σ à Ω ne dépend que de l'abélianisé $\tilde{\sigma}$ de σ.

PROPOSITION 10. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$, *alors* $\det \Phi'_\sigma = \pm 1$.

Démonstration. Différentions la relation $\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$ et prenons les déterminants. On obtient

$$\det(\Phi'_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma)\det(\Phi'_\sigma) = 1 \ .$$

Comme ces déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, ils sont nécessairement constants, égaux à ± 1.

LEMME 11. *Pour tout* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$, *on a* $Q_\sigma(0, 0, 0) = 0$ *ou* 1.

Démonstration. Il suffit de considérer $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Nous donnerons plus loin un résultat plus précis que celui-ci.

PROPOSITION 12. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$, *on a* $Q_\sigma = 1$.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8 et du lemme 11.

II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE Φ

Comme l'ont observé Kolar et Ali [3], les polynômes de Chebyschev interviennent naturellement dans ce contexte.

Considérons les deux suites de polynômes $\{t_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ et $\{u_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ satisfaisant la même relation de récurrence

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = xt_n(x)$$
$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = xu_n(x)$$

avec les conditions initiales

$$t_0(x) = 2 \ , \quad t_1(x) = x \ , \quad u_0(x) = 0 \ , \quad u_1(x) = 1 \ .$$

Il est facile de vérifier les faits suivants:

$$t_{-n} = t_n \ , \quad d^0 t_n = |n|$$
$$u_{-n} = -u_n \ , \quad d^0 u_n = n - 1 \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$
$$t_n(2\cos\varphi) = 2\cos n\varphi$$
$$u_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$
$$t_n(x) = xu_n(x) - 2u_{n-1}(x) \ .$$