3. Lemmes préliminaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

reformule en les inégalités $\|\zeta_n'\| \geqslant f^{-1}$, et on peut définir une suite asymptotiquement invariante $(\zeta_n' \|\zeta_n'\|^{-1})_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma_0)^+_{0,1}$. Il en résulte que Γ_0 est intérieurement moyennable, ce qui achève la preuve de la proposition 4.

3. Lemmes préliminaires

Soit d'abord Γ un groupe discret. Notons *Conj'*(Γ) l'ensemble des classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{e\}$. Avec les notations du début du chapitre précédent, on a

$$\alpha_\Gamma = \bigoplus_{C \in Conj'(\Gamma)} \alpha_{\Gamma, C}$$

où $\oplus$ désigne une somme orthogonale. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, choisissons de plus un élément $\gamma_C \in C$; notons $\mathscr{C}_\Gamma = \{\gamma_C\}_{C \in Conj'(\Gamma)}$ le sous-ensemble de Γ ainsi spécifié. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, la classe C s'identifie à l'espace homogène $Z(\gamma_C, \Gamma) \backslash \Gamma$ et on a

$$\alpha_{\Gamma, C} \approx Ind_{Z(\gamma_C, \Gamma)}^{\Gamma} (1_{Z(\gamma_C, \Gamma)})$$

où $Z(\gamma_C, \Gamma)$ désigne le centralisateur de γ_C dans Γ et où $\approx$ indique l'équivalence unitaire des représentations. On a donc

$$\alpha_\Gamma \approx \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, \Gamma)}^{\Gamma} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Lemme 3. *Soit Γ un réseau dans un groupe localement compact G. Si Γ est intérieurement moyennable, on a*

$$1_G \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, G)}^{G} (1_{Z(\gamma, G)}) .$$

Preuve. Par hypothèse, on a

$$1_\Gamma \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, \Gamma)}^{\Gamma} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

En induisant à G on obtient

$$Ind_\Gamma^G (1_\Gamma) \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, \Gamma)}^{G} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Par ailleurs, 1_G est une sous-représentation de $Ind_\Gamma^G(1_\Gamma)$, car Γ est un réseau dans G. La conclusion résulte donc de l'assertion (ii) du lemme suivant. □

Le lemme qui suit est essentiellement le «principe de majoration de Herz» [EyL].

LEMME 4. *Soient* $\{H_j\}_{j \in J}$ *et* $\{H'_j\}_{j \in J}$ *deux familles de sous-groupes fermés d'un groupe localement compact* G *telles que* $H'_j \subset H_j$ *pour tout* $j \in J$.

(i) S'il existe pour tout $j \in J$ *une représentation unitaire* π_j *de* H_j *telle que* $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(\pi_j)$, *alors* $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$.

(ii) Si $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H'_j}^G(1_{H'_j})$, *alors* $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$.

Preuve. (a) Précisons le modèle considéré ici pour les représentations induites en rappelant ceci. On considère d'abord un sous-groupe fermé H de G et une représentation π de H dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$.

On choisit une mesure μ sur l'espace homogène $H \backslash G$ dont la classe est invariante par l'action à droite de G. (On peut par exemple prendre l'image par la projection canonique $G \to H \backslash G$ d'une mesure de probabilité sur G dans la classe de la mesure de Haar.) Pour tout $g \in G$, on a donc une dérivée de Radon-Nikodym décrite par l'application

$$\Delta : \begin{cases} (H \backslash G) \times G \to \mathbf{R}_+ \\ (s, g) \mapsto \frac{d\mu(s^g)}{d\mu(s)} \end{cases}$$

satisfaisant l'identité de cocycle $\Delta(s, gg') = \Delta(s, g)\Delta(s^g, g')$.

On introduit l'espace vectoriel $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ des applications mesurables $\xi : G \to \mathscr{H}_\pi$ (modulo l'égalité presque partout) qui sont H-équivariantes, c'est-à-dire telles que

$$\xi(h^{-1}x) = \pi(h)\xi(x) \text{ pour tout } h \in H \text{ et presque tout } x \in G$$

et de carré sommable au sens où

$$\int_{H \backslash G} \| \xi(\dot{x}) \|^2 d\mu(\dot{x}) < \infty \ ;$$

comme $\| \xi(x) \|^2$ ne dépend que de la classe $\dot{x} = Hx$ de x, on a commis l'abus d'écrire ce nombre $\| \xi(\dot{x}) \|^2$. L'espace $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ est muni d'un produit scalaire défini par

$$< \xi \mid \xi' > = \int_{H \backslash G} < \xi(\dot{x}) \mid \xi'(\dot{x}) > d\mu(\dot{x})$$

qui en fait un espace de Hilbert.

On définit la représentation $\tilde{\pi} = Ind_H^G(\pi)$ de G dans $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ par

$$(\tilde{\pi}(g)\xi)(x) = \xi(xg)\Delta(\dot{x}, g)^{1/2}$$

pour tous $g \in G$, $\xi \in L^2(G, \mathcal{H}_\pi)^H$ et $x \in G$ (avec $\dot{x} = Hx \in H\backslash G$). On vérifie que $\tilde{\pi}$ est bien une représentation de G, car Δ est un cocycle, et qu'elle est bien unitaire, car (en posant $y = \dot{x}^g$)

$$\begin{aligned}\| \tilde{\pi}\ (g)\xi \|^2 &= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{x}^g) \|^2 \Delta(\dot{x}, g)\, d\mu(\dot{x}) \\ &= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{y}) \|^2 \Delta(\dot{y}^{g^{-1}}, g)\, \Delta(\dot{y}, g^{-1})\, d\mu(\dot{y}) \\ &= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{y}) \|^2 d\mu(\dot{y}) \\ &= \| \xi \|^2\end{aligned}$$

pour tous $g \in G$ et $\xi \in L^2(G, \mathcal{H}_\pi)^H$.

(b) Montrons d'abord l'assertion (i) du lemme lorsqu'il n'y a qu'un sous-groupe H de G. Posons $\sigma = 1_H$ et $\tilde{\sigma} = Ind_H^G(1_H)$. L'application de composition avec la norme de $\mathcal{H}_\pi$ s'écrit

$$N : \begin{cases} L^2(G, \mathcal{H}_\pi)^H \to L^2(G, \mathcal{H}_\sigma = \mathbf{C})^H \\ \xi \quad \mapsto \quad (G \to \mathbf{C},\ x \mapsto \| \xi(x) \|)\ . \end{cases}$$

Elle est G-équivariante (via les représentations $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\sigma}$), lipschitzienne de rapport 1, et $\| N(\xi) \| = \| \xi \|$ pour tout $\xi \in L^2(G, \mathcal{H}_\pi)^H$.

Dire que $1_G \prec \tilde{\pi}$, c'est dire que, pour toute partie compacte K de G et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\xi = \xi_{K,\varepsilon} \in L^2(G, \mathcal{H}_\pi)^H$ telle que $\| \xi \| = 1$ et telle que

$$\sup_{k \in K} \| \tilde{\pi}(k)\xi - \xi \| < \varepsilon\ .$$

Ces propriétés impliquent qu'on a aussi $\| N(\xi) \| = 1$ et

$$\sup_{k \in K} \| \tilde{\sigma}(k) N(\xi) - N(\xi) \| < \varepsilon\ .$$

Il en résulte que $1_G \prec \tilde{\sigma}$.

(c) On montre le cas général de l'assertion (i) grâce au même argument, en utilisant une application

$$N : \begin{cases} \oplus_{j \in J} L^2(G, \mathcal{H}_{\pi_j})^{H_j} \to \oplus_{j \in J} L^2(G, \mathbf{C})^{H_j} \\ (\xi_j)_{j \in J} \quad \mapsto \quad (N_j \xi_j)_{j \in J} \end{cases}$$

avec N_j comme dans (b) pour tout $j \in J$.

(d) L'hypothèse de (ii) s'écrit aussi

$$1_G \prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (Ind_{H_j'}^{H_j}(1_{H_j'}))$$

de sorte que l'assertion (ii) est un cas particulier de (i). □

Remarque. Pour illustrer le lemme 4, répétons l'un des arguments montrant qu'un groupe Γ qui est moyennable et non réduit à $\{e\}$ est aussi intérieurement moyennable. Rappelons que Γ est moyennable si et seulement si $1_\Gamma \prec \rho_\Gamma$.

Pour *toute* classe de conjugaison $C \subset \Gamma - \{e\}$, si on choisit un élément γ de C, on a (avec les notations comme au chapitre 3)

$$1_\Gamma \prec \rho_\Gamma = Ind_{Z(\gamma,\Gamma)}^\Gamma \rho_{Z(\gamma,\Gamma)} .$$

Le lemme 4.i implique qu'on a aussi

$$1_\Gamma \prec Ind_{Z(\gamma,\Gamma)}^\Gamma 1_{Z(\gamma,\Gamma)} = \alpha_{\Gamma,C} .$$

On a donc a fortiori $1_\Gamma \prec \alpha_\Gamma$.

LEMME 5. *Soit G un groupe localement compact qui possède la propriété (T) de Kazhdan et soit $(H_j)_{j \in J}$ une famille de sous-groupes fermés de G. On suppose que, pour tout $j \in J$, il n'existe aucune mesure de probabilité G-invariante sur l'espace homogène $H_j \backslash G$. Alors*

$$1_G \not\prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) .$$

Preuve. Supposons par l'absurde que l'on ait $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$. Comme G a la propriété (T), la contenance aurait lieu au sens fort. Comme la représentation 1_G est irréductible, il existerait $j \in J$ tel que 1_G soit une sous-représentation de $Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$, c'est-à-dire que $H_j \backslash G$ possède une mesure de probabilité G-invariante, contrairement à l'hypothèse. □

LEMME 6. *Soit G un groupe localement compact agissant continûment dans un espace compact Ω et soit $(H_j)_{j \in J}$ une famille de sous-groupes fermés de G. On suppose qu'il n'existe aucune mesure de probabilité G-invariante sur Ω, et qu'il existe pour tout $j \in J$ une mesure de probabilité H_j-invariante ν_j sur Ω. Alors*

$$1_G \not\prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) .$$

Preuve. On convient ici que l'action de G sur Ω est à droite.

Pour tout $j \in J$, on choisit une mesure de probabilité μ_j sur $H_j \backslash G$ qui est quasi-invariante par G (voir la preuve du lemme 4). On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} L^2(H_j \backslash G, \mu_j)$$

de la représentation $\oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$ ainsi que sa sphère unité $\mathcal{H}_1$. On introduit aussi l'espace $Prob(\Omega)$ des mesures de probabilité sur Ω, muni de la topologie vague; c'est naturellement un G-espace compact. Nous allons définir en deux temps une application

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 & \to & Prob(\Omega) \\ f & \mapsto & \nu_f \end{cases}$$

lipschitzienne et G-équivariante.

Dans un premier temps, on introduit pour tout $j \in J$ le G-espace $Mes_+(H_j \backslash G)$ des mesures positives finies sur $H_j \backslash G$, ainsi que l'application

$$\begin{cases} L^2(H_j \backslash G, \mu_j) & \to & Mes_+(H_j \backslash G) \\ f_j & \mapsto & \mu_{f_j} = |f_j|^2 \mu_j \end{cases}$$

qui est évidemment lipschitzienne sur les parties bornées. De plus, comme G agit à gauche via $Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$ sur $L^2(H_j \backslash G, \mu_j)$ et à droite sur $Mes_+(H_j \backslash G)$, on a (avec des notations dont nous espérons le sens évident au lecteur)

$$\begin{aligned} d\mu_{\pi(g^{-1})f_j}(\dot{x}) &= |f_j(\dot{x}^g)|^2 \Delta(\dot{x}, g) d\mu_j(\dot{x}) \\ &= |f_j(\dot{x}^g)|^2 d\mu_j(\dot{x}^g) \\ &= d((\mu_{f_j})^g)(\dot{x}) \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$.

Dans un second temps, on introduit le sous-espace

$$\prod_{j \in J}^{1} Mes_+(H_j \backslash G) \subset \prod_{j \in J} Mes_+(H_j \backslash G)$$

formé des familles $(\lambda_j)_{j \in J}$ telles que $\sum_{j \in J} \lambda_j(H_j \backslash G) < \infty$, ainsi que l'application de convolution

$$\begin{cases} \prod_{j \in J}^{1} Mes_+(H_j \backslash G) & \to & Mes_+(\Omega) \\ (\lambda_j)_{j \in J} & \mapsto & \sum_{j \in J} \nu_j \star \lambda_j \end{cases}$$

où

$$\nu_j \star \lambda_j = \int_{H_j \backslash G} (\nu_j)^{\dot{g}} \, d\lambda_j(\dot{g}) .$$

Pour tout $g \in G$ de projection canonique $\dot{g} \in H_j \backslash G$, l'image $(\nu_j)^g$ par g de la mesure ν_j sur Ω ne dépend que de $\dot{g}$, et nous avons noté $(\nu_j)^{\dot{g}}$ cette mesure image. Il est à nouveau évident que $(\lambda_j) \mapsto \sum \nu_j \star \lambda_j$ est une application lipschitzienne, et qu'elle est G-équivariante pour les actions à droite naturelles de G à la source et au but.

On obtient par composition l'application $\mathcal{H}_1 \to Prob(\Omega)$ annoncée, qui applique un vecteur unité $f = (f_j)_{j \in J}$ sur la mesure de probabilité

$$\nu_f = \sum_{j \in J} \int_{H_j \backslash G} (\nu_j)^{\dot{g}} \, | f_j(\dot{g}) |^2 d\mu_j(\dot{g}) \, .$$

Supposons alors qu'on ait

$$1_G \prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) \, .$$

Il existerait dans $\mathcal{H}_1$ une suite de vecteurs

$$(f_n)_{n \geqslant 1} = ((f_{j,n})_{j \in J})_{n \geqslant 1}$$

asymptotiquement G-invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k \in K} \sum_{j \in J} \| Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) \, (k^{-1}) \, (f_{j,n}) - f_{j,n} \|^2 = 0$$

pour toute partie compacte K de G. Il en résulterait que la suite correspondante $(\nu_{f_n})_{n \geqslant 1}$ de $Prob(\Omega)$ serait aussi asymptotiquement invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k \in K} \| (\nu_{f_n})^k - \nu_{f_n} \| = 0$$

pour toute partie compacte K de G. Quitte à passer à une suite extraite, on obtiendrait à la limite une mesure de probabilité G-invariante sur Ω, en contradiction avec les hypothèses du lemme. L'hypothèse de contenance faible ci-dessus est donc impossible, et la preuve est achevée. □

4. Preuve des résultats de l'introduction

Enonçons d'abord le raffinement suivant du théorème A.

Théorème B. *On considère des groupes localement compacts* G_H, G_T *un réseau*

$$\Gamma \subset G = G_H \times G_T$$

et un sous-groupe S *de* G *contenant* Γ, *ayant les propriétés suivantes.*