

## 4. Preuve des résultats de l'introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Pour tout  $g \in G$  de projection canonique  $\dot{g} \in H_j \setminus G$ , l'image  $(v_j)^g$  par  $g$  de la mesure  $v_j$  sur  $\Omega$  ne dépend que de  $\dot{g}$ , et nous avons noté  $(v_j)^{\dot{g}}$  cette mesure image. Il est à nouveau évident que  $(\lambda_j) \mapsto \sum v_j \star \lambda_j$  est une application lipschitzienne, et qu'elle est  $G$ -équivariante pour les actions à droite naturelles de  $G$  à la source et au but.

On obtient par composition l'application  $\mathcal{H}_1 \rightarrow \text{Prob}(\Omega)$  annoncée, qui applique un vecteur unité  $f = (f_j)_{j \in J}$  sur la mesure de probabilité

$$v_f = \sum_{j \in J} \int_{H_j \setminus G} (v_j)^{\dot{g}} |f_j(\dot{g})|^2 d\mu_j(\dot{g}).$$

Supposons alors qu'on ait

$$1_G < \bigoplus_{j \in J} \text{Ind}_{H_j}^G(1_{H_j}).$$

Il existerait dans  $\mathcal{H}_1$  une suite de vecteurs

$$(f_n)_{n \geq 1} = ((f_{j,n})_{j \in J})_{n \geq 1}$$

asymptotiquement  $G$ -invariante au sens où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in K} \sum_{j \in J} \|\text{Ind}_{H_j}^G(1_{H_j})(k^{-1})(f_{j,n}) - f_{j,n}\|^2 = 0$$

pour toute partie compacte  $K$  de  $G$ . Il en résulterait que la suite correspondante  $(v_{f_n})_{n \geq 1}$  de  $\text{Prob}(\Omega)$  serait aussi asymptotiquement invariante au sens où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in K} \|(v_{f_n})^k - v_{f_n}\| = 0$$

pour toute partie compacte  $K$  de  $G$ . Quitte à passer à une suite extraite, on obtiendrait à la limite une mesure de probabilité  $G$ -invariante sur  $\Omega$ , en contradiction avec les hypothèses du lemme. L'hypothèse de contenance faible ci-dessus est donc impossible, et la preuve est achevée.  $\square$

#### 4. PREUVE DES RÉSULTATS DE L'INTRODUCTION

Enonçons d'abord le raffinement suivant du théorème A.

**THÉORÈME B.** *On considère des groupes localement compacts  $G_H, G_T$  un réseau*

$$\Gamma \subset G = G_H \times G_T$$

*et un sous-groupe  $S$  de  $G$  contenant  $\Gamma$ , ayant les propriétés suivantes.*

(a) Le groupe  $G_H$  agit par homéomorphismes sur un espace compact  $\Omega$  et il n'existe aucune mesure de probabilité  $G_H$ -invariante sur  $\Omega$ . De plus, pour tout  $x \in G_H - \{e\}$  tel que  $(x, e) \in S$ , il existe une mesure de probabilité  $Z(x, G_H)$ -invariante sur  $\Omega$ .

(b) Le groupe  $G_T$  possède la propriété (T) de Kazhdan. De plus, pour tout  $x \in G_T - \{e\}$ , le centralisateur  $Z(x, G_T)$  n'est pas de covolume fini dans  $G_T$ .

Alors  $S$  n'est pas intérieurement moyennable.

*Preuve.* Notons  $\beta_\Gamma$  la restriction à  $\Gamma$  de la représentation  $\alpha_S$  définie au chapitre 2. Soit  $\Sigma$  un système de représentants des orbites de l'action de  $\Gamma$  sur  $S - \{e\}$  par  $(\gamma, s) \mapsto \gamma s \gamma^{-1}$ . On a

$$\beta_\Gamma = \bigoplus_{s \in \Sigma} \text{Ind}_{Z(s, \Gamma)}^\Gamma (1_{Z(s, \Gamma)}) .$$

Si  $S$  était intérieurement moyennable, on aurait  $1_S \prec \alpha_S$ , donc  $1_\Gamma \prec \beta_\Gamma$  par restriction à  $\Gamma$ . Il suffit donc de supposer que  $1_\Gamma \prec \beta_\Gamma$  et de montrer qu'on obtient une contradiction.

Si on avait  $1_\Gamma \prec \beta_\Gamma$ , on aurait par induction de  $\Gamma$  à  $G$  (comme au lemme 4) la relation

$$(\star) \quad 1_G \prec \bigoplus_{s \in \Sigma} \text{Ind}_{Z(s, G)}^G (1_{Z(s, G)}) .$$

Pour tout  $s \in \Sigma$ , écrivons

$$s = (s_H, s_T) \in \Sigma \subset S \subset G = G_H \times G_T .$$

Posons

$$\Sigma^H = \Sigma \cap (G_H \times \{e\})$$

ainsi que

$$\Sigma^T = \Sigma - \Sigma^H .$$

Le membre de droite de la relation  $(\star)$  se décompose naturellement en une somme de deux termes, chacun étant lui-même une somme sur l'un des ensembles  $\Sigma^H, \Sigma^T$ . Or une relation de contenance faible de la forme  $1_\Gamma \prec \bigoplus_{1 \leq n \leq N} (\pi_n)$  où  $N$  est un nombre fini implique que  $1_\Gamma \prec \pi_n$  pour l'un des  $n$  au moins. Il résulterait donc de  $(\star)$  que l'une au moins des relations

$$(\star_H) \quad 1_G \prec \bigoplus_{s \in \Sigma^H} \text{Ind}_{Z(s, G)}^G (1_{Z(s, G)})$$

$$(\star_T) \quad 1_G \prec \bigoplus_{s \in \Sigma^T} \text{Ind}_{Z(s, G)}^G (1_{Z(s, G)})$$

aurait lieu.

Supposons d'abord que  $(\star_T)$  ait lieu. Pour tout  $s = (s_H, s_T) \in \Sigma^T$ , posons

$$H(s) = G_H \times Z(s_T, G_T).$$

Le lemme 4.ii implique que l'on aurait

$$1_G < \bigoplus_{s \in \Sigma^T} \text{Ind}_{H(s)}^G (1_{H(s)})$$

et donc aussi la relation équivalente

$$1_{G_T} < \bigoplus_{s \in \Sigma^T} \text{Ind}_{Z(s_T, G_T)}^{G_T} (1_{Z(s_T, G_T)}).$$

Comme  $s_T \neq e$  pour tout  $s \in \Sigma^T$ , les hypothèses du théorème stipulent que  $Z(s_T, G_T)$  n'est pas de covolume fini dans  $G_T$ . La dernière relation de contenance faible ci-dessus serait donc en contradiction avec le lemme 5.

Supposons alors que la relation  $(\star_H)$  ait lieu. Le même argument que plus haut implique que l'on aurait aussi

$$1_{G_H} < \bigoplus_{s \in \Sigma^H} \text{Ind}_{Z(s_H, G_H)}^{G_H} (1_{Z(s_H, G_H)}).$$

Vu les hypothèses du théorème B, il existe sur  $\Omega$  une mesure de probabilité  $Z(s_H, G_H)$ -invariante. La dernière relation de contenance faible ci-dessus serait alors en contradiction avec le lemme 6 appliqué à  $G_H$  agissant sur  $\Omega$ .  $\square$

*Preuve du théorème A.* Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème A impliquent celles du théorème B lorsque  $S = \Gamma$ . Soit  $x \in G_H - \{e\}$  tel que  $(x, e) \in \Gamma$ . L'hypothèse (c) du théorème A implique que  $x$  est d'ordre infini; comme  $\Gamma$  est discret dans  $G$ , cela implique que  $x^{\mathbb{Z}}$  n'est pas relativement compact. L'hypothèse (a) du théorème A implique donc l'hypothèse (a) du théorème B. Comme les hypothèses (b) coïncident dans les deux théorèmes, ceci achève la preuve du théorème A.  $\square$

*Preuve de la proposition 2.* Soit  $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ , avec  $G_\alpha = \mathbf{G}(\mathbf{k}_\alpha)$  simple non compact et de centre réduit à  $\{e\}$ , comme à la proposition 2. On peut supposer les notations telles que  $A = B \amalg D$ , avec  $G_\beta$  de rang déployé un pour tout  $\beta \in B$  et avec  $G_\delta$  de rang déployé au moins deux pour tout  $\delta \in D$ . On pose alors  $G_H = \prod_{\beta \in B} G_\beta$  et  $G_T = \prod_{\delta \in D} G_\delta$ . On considère un réseau sans torsion  $\Gamma_0$  de  $G = G_H \times G_T$ . Vérifions les hypothèses du théorème A.

(a) Pour chaque  $\beta \in B$ , le groupe  $G_\beta$  agit par isométries sur un espace  $X_\beta$  qui est un espace hyperbolique approprié (lorsque  $\mathbf{k}_\beta$  est archimédien) ou un arbre (dans les autres cas). Notons  $\Omega_\beta$  le bord de  $X_\beta$  (à la Gromov). Soit  $g_\beta \in G_\beta$  tel que  $g_\beta^Z$  n'est pas relativement compact dans  $G_\beta$ . Alors  $g_\beta$  a exactement un ou deux points fixes dans  $\Omega_\beta$ , et il existe sur  $\Omega_\beta$  une mesure de probabilité  $Z(g_\beta, G_\beta)$ -invariante (à support ces un ou deux points).

Le groupe  $G_H$  agit sur la réunion disjointe  $\Omega = \coprod_{\beta \in B} \Omega_\beta$  par  $((g_\beta)_{\beta \in B})x = g_{\beta_0}x$  pour  $x \in \Omega_{\beta_0}$ .

Soit  $\mu$  une mesure finie  $G$ -invariante sur  $\Omega$ ; pour tout  $\beta \in B$ , la mesure induite  $\mu_\beta$  sur  $\Omega_\beta$  est  $G_\beta$ -invariante, donc réduite à zéro puisque  $G_\beta$  n'est pas moyennable; par suite  $\mu = 0$ . Soit  $g = (g_\beta)_{\beta \in B} \in G_H$  tel que  $g^Z$  ne soit pas relativement compact dans  $G_H$ ; il existe  $\beta_0 \in B$  tel que  $(g_{\beta_0})^Z$  ne soit pas relativement compact dans  $G_{\beta_0}$ , et par suite il existe comme ci-dessus une mesure de probabilité  $Z(g_{\beta_0}, G_{\beta_0})$ -invariante sur  $\Omega_{\beta_0}$ ; en prolongeant cette mesure par zéro sur  $\coprod_{\beta \neq \beta_0} \Omega_\beta$ , on obtient une mesure de probabilité  $Z(g, G_H)$ -invariante sur  $\Omega$ . L'action de  $G_H$  sur  $\Omega$  vérifie donc bien les hypothèses (a) du théorème.

(b) Le groupe  $G_T$  a la propriété (T) car c'est un produit direct de groupes qui ont cette propriété. D'autre part, pour tout  $\delta \in D$  et pour tout  $x_\delta \in G_\delta - \{e\}$ , le centralisateur  $Z(x_\delta, G_\delta)$  n'est pas Zariski-dense dans  $G_\delta$ . Il résulte donc du théorème de densité de Borel que  $Z(x_\delta, G_\delta)$  n'est pas de covolume fini dans  $G_\delta$  (voir [Zim, Theorem 3.2.5] si le corps local  $\mathbf{k}_\delta$  est archimédien, et [Wan] sinon). Par suite, si  $x = (x_\delta)_{\delta \in D} \in G_T - \{e\}$ , on a  $Z(x, G_T) = \prod_{\delta \in D} Z(x_\delta, G_\delta)$  et  $Z(x, G_T)$  n'est pas de covolume fini dans  $G_T = \prod_{\delta \in D} G_\delta$ .

(c) Cette hypothèse du théorème A est strictement contenue dans les hypothèses de la proposition 2.  $\square$

Le théorème B permet par exemple de généraliser comme suit l'énoncé de la proposition 2. On considère un groupe  $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha = G_H \times G_T$  comme dans la preuve précédente.

PROPOSITION 2<sup>bis</sup>. *Soit  $G$  comme ci-dessus et soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$  tel que  $\Gamma \cap (G_H \times \{e\})$  soit sans torsion. Alors tout sous-groupe  $S$  de  $G$  contenant  $\Gamma$  est non intérieurement moyennable.*

Notons d'une part que  $S$  n'est pas nécessairement fermé dans  $G$ , et d'autre part que l'assertion de non moyennabilité intérieure porte sur  $S$  vu comme «groupe discret».

*Preuve de la proposition 1.* Elle résulte de la proposition 2, comme indiqué dans l'introduction.  $\square$

Avant d'entreprendre la preuve de la proposition 3, considérons un corps  $\mathbf{k}$  muni d'une valeur absolue

$$\begin{cases} \mathbf{k} & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ \lambda & \mapsto & |\lambda| \end{cases}$$

par rapport à laquelle  $\mathbf{k}$  est un corps local (c'est-à-dire est localement compact et non discret). On sait qu'une telle valeur absolue possède un prolongement unique à une clôture algébrique  $\mathbf{k}_\alpha$  de  $\mathbf{k}$  [Wae, Section 18.4] et donc à la complétion correspondante  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{k}_\alpha$ . La droite projective  $P_{\mathbf{K}}^1$  hérite ainsi de  $\mathbf{K}$  une topologie qui rend continue l'action naturelle de  $PGL(2, \mathbf{k})$ . (On prendra garde que  $P_{\mathbf{K}}^1$  n'est en général pas compact, car  $\mathbf{K}$  n'est en général pas localement compact.)

Soit  $x \in PGL(2, \mathbf{k})$ ,  $x \neq e$  un élément représenté par une matrice  $\tilde{x} \in GL(2, \mathbf{k})$  de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{k}_\alpha$ . Rappelons que  $x$  est dit *hyperbolique* [respectivement *parabolique*, *elliptique*,] si  $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$  [resp.  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ ]. Ainsi  $x$  possède exactement deux points fixes sur  $P_{\mathbf{K}}^1$  si  $x$  est hyperbolique ou elliptique, et un point fixe si  $x$  est parabolique.

Pour un élément hyperbolique  $h \in PGL(2, \mathbf{k})$ , on note  $\omega_h$  le point fixe correspondant à la valeur propre  $\lambda_\omega$  de  $h$  telle que  $|\lambda_\omega| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$ , et  $\alpha_h$  l'autre point fixe de  $h$  dans  $P_{\mathbf{K}}^1$ . Etant donné des voisinages  $A_h, \Omega_h$  de  $\alpha_h, \omega_h$  dans  $P_{\mathbf{K}}^1$ , il existe alors un entier  $n_0$  tel que

$$h^n(P_{\mathbf{K}}^1 - A_h \cup \Omega_h) \subset A_h \cup \Omega_h$$

pour tout  $n$  tel que  $|n| \geq n_0$ .

LEMME 7. Soient  $\mathbf{k}$  un corps local et  $S$  un sous-groupe de  $PGL(2, \mathbf{k})$ . On suppose que

- (i)  $S$  ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini,
- (ii)  $S$  contient un élément hyperbolique.

Alors  $S$  n'est pas intérieurement moyennable.

*Preuve.* Soit  $h_0 \in S$  un élément hyperbolique de points fixes  $\alpha_0, \omega_0 \in P_{\mathbf{K}}^1$ . Le groupe  $S$  est Zariski-dense dans  $G = PGL(2, \mathbf{k})$ , car les sous-groupes algébriques connexes de  $G$  distincts de  $G$  sont résolubles. Il existe donc  $x_1, x_2, x_3 \in S$  tels que les huit points  $\alpha_0, \omega_0$

et  $x_j(\alpha_0), x_j(\omega_0)$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) sont distincts. Pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on pose  $h_j = x_j h_0 x_j^{-1}$  et on note  $\alpha_j, \omega_j$  ses points fixes. Quitte à remplacer chacun des éléments  $h_0, h_1, h_2, h_3$  par une puissance convenable, on peut alors trouver

des voisinages  $E_j$  de  $\{\alpha_j, \omega_j\}$  disjoints deux à deux ( $1 \leq j \leq 3$ ) et un domaine fondamental  $D$  pour l'action de  $h_0^{\mathbf{Z}}$  sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^1 - \{\alpha_0, \omega_0\}$  contenant les  $E_j$

tels que

$$h_j^n (\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^1 - E_j) \subset E_j \quad \text{pour tous } n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \text{ et } j \in \{1, 2, 3\} .$$

Posons

$$C = \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^1 - D$$

$$T = \left\{ s \in S - \{e\} \left| \begin{array}{l} s \text{ possède un point fixe dans } C \\ s \text{ ne possède aucun point fixe dans } E_1 \cup E_2 \cup E_3 \end{array} \right. \right\}$$

On vérifie qu'on a

$$(\star) \quad \begin{array}{l} S - \{e\} = T \cup h_0 T h_0^{-1} \cup h_0^{-1} T h_0 \\ T, h_1 T h_1^{-1}, h_2 T h_2^{-1}, h_3 T h_3^{-1} \text{ disjoints deux à deux .} \end{array}$$

En effet, tout élément  $s \in h_1 T h_1^{-1}$  possède un point fixe dans  $E_1$  (par suite  $s \notin T$ ) et n'en possède aucun dans  $E_2 \cup E_3$ , sinon  $h_1^{-1} s h_1 \in T$  en posséderait dans  $h_1^{-1}(E_2 \cup E_3) \subset E_1$ , contrairement à la définition de  $T$  (par suite  $s \notin h_2 T h_2^{-1} \cup h_3 T h_3^{-1}$ ); les autres vérifications sont analogues.

Il résulte de  $(\star)$  que  $S$  n'est pas intérieurement moyennable. (Voir [HaS]; un argument de ce type apparaît dans la preuve du théorème 5 de [BeH], mais n'y est pas correct, car une transformation elliptique de l'arbre de Bruhat-Tits concerné peut posséder *plusieurs* points fixes.)  $\square$

*Remarques.* (1) Si  $\mathbf{k}$  est de caractéristique nulle ou impaire, on sait qu'il existe une extension finie de  $\mathbf{k}$  contenant les racines de tous les polynômes du second degré à coefficients dans  $\mathbf{k}$ , donc les valeurs propres de toute matrice  $\tilde{x} \in GL(2, \mathbf{k})$ . Mais ceci n'est pas vrai lorsque  $\mathbf{k} = \mathbf{F}_2((t))$ , d'où l'introduction du corps  $\mathbf{K}$  ci-dessus.

(2) Considérons le sous-groupe  $S = PSL(2, \mathbf{Z})$  du groupe  $G = PSL(2, \mathbf{Q}_p)$ . Le groupe  $S$  ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini, et ne contient pas d'élément hyperbolique (car  $S$  est contenu dans le sous-groupe compact  $PSL(2, \mathbf{Z}_p)$  de  $G$ ). Pour la preuve ci-dessus, on ne peut donc pas supprimer du lemme 7 l'hypothèse (ii).

On peut sans doute supprimer (ii) en raisonnant comme au lemme 4.1 de [Tit], ce qui pour l'exemple ci-dessus revient à plonger  $PSL(2, \mathbf{Z})$  dans  $PSL(2, \mathbf{R})$ . Mais la preuve du cas général sans l'hypothèse (ii) dépasse l'ambition du présent travail.

*Preuve de la proposition 3.* L'assertion pour  $d = 2$  résulte du lemme 7. L'assertion pour  $d \geq 3$  résulte du théorème B.  $\square$

Le premier auteur remercie Bachir Bekka, Marc Burger et Alain Valette pour d'utiles commentaires.

### RÉFÉRENCES

- [BeH] BEDOS, E. et P. DE LA HARPE. Moyennabilité intérieure des groupes: définitions et exemples. *L'Enseignement math.* 32 (1986), 139-157.
- [Dix] DIXMIER, J. *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, 1969.
- [Efr] EFFROS, E.G. Property  $\Gamma$  and Inner Amenability. *Proc. Amer. Math. Soc.* 47 (1975), 483-486.
- [Eym] EYMARD, P. *Initiation à la théorie des groupes moyennables*. Springer Lecture Notes 497 (1975), 89-107.
- [EyL] EYMARD, P. et N. LOHOUE. Sur la racine carrée du noyau de Poisson dans les espaces symétriques et une conjecture de E.M. Stein. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 8 (1975), 179-188.
- [Fur] FURSTENBERG, H. A Poisson Formula for Semisimple Lie Groups. *Annals of Math.* 77 (1963), 335-383.
- [GiH] GIORDANO, T. et P. DE LA HARPE. Groupes de tresses et moyennabilité intérieure. *Arkiv för Mat.* 29 (1991), 63-72.
- [Gre] GREENLEAF, F.P. *Invariant Means on Topological Groups*. Van Nostrand, 1969.
- [HaJ] DE LA HARPE, P. et K. JHABVALA. Quelques propriétés des algèbres d'un groupe discontinu d'isométries hyperboliques. In: *Ergodic Theory* (Séminaire, Les Plans-sur-Bex, 1980), *Monographie de l'Enseignement Math.* 29 (1981), 47-55.
- [HaS] DE LA HARPE, P. et G. SKANDALIS. Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales. *L'Enseignement Math.* 32 (1986), 121-138.
- [Lu1] LUBOTZKY, A. Trees and Discrete Subgroups of Lie Groups over Local Fields. *Bull. Amer. Math. Soc.* 20 (1989), 27-30.
- [Lu2] ——— Lattices in Rank One Lie Groups over Local Fields. *Geom.-Funct.-Anal.* 1 (1991), 406-431.
- [Mar] MARGULIS, G.A. *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*. Springer, 1991.
- [Pat] PATERSON, A.T. *Amenability*. Math. Surveys and Monographs 29, Amer. Math. Soc., 1988.
- [Ra1] RAGHUNATHAN, M.S. *Discrete Subgroups of Lie Groups*. Springer, 1972.
- [Ra2] ——— Discrete Subgroups of Algebraic Groups over Local Fields of Positive Characteristics. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 99 (1989), 127-146.