L'Enseignement Mathématique, t. 40 (1994), p. 29-48

LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE

par Pierre ARNOUX

RÉSUMÉ. Nous donnons une preuve élémentaire et explicite du fait que le flot géodésique sur la surface modulaire (quotient du plan hyperbolique par l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$) peut être codé en utilisant les fractions continues.

ABSTRACT. We give an elementary and explicit proof of the coding of the geodesic flow on the modular surface by continued fractions.

0. INTRODUCTION

Il est connu depuis longtemps, par un travail d'Artin [Ar] que le flot géodésique sur la surface modulaire peut être codé en utilisant les fractions continues; les articles récents d'Adler et Flatto et de Series ont fait une étude approfondie de ce codage ([AF], [Se]). Le but de cet article est de retrouver ce résultat de façon explicite et élémentaire en mettant un système de coordonnées adapté sur le fibré unitaire tangent de la surface modulaire.

De façon plus précise, on peut définir algébriquement le flot géodésique sur la surface modulaire comme l'action à droite, sur l'espace quotient $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$, du groupe des matrices diagonales positives de la forme $g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ (nous rappellerons plus bas la démonstration); mais on peut aussi voir $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$ comme l'espace des réseaux de $\mathbf{R}^2$ dont le domaine fondamental est de volume 1, et l'action de g_t consiste alors à écraser le réseau le long de l'axe des abscisses, en multipliant les abscisses par $e^{t/2}$ et les ordonnées par $e^{-t/2}$.

Pour la plupart des réseaux (ceux qui ne contiennent pas de vecteurs horizontaux ou verticaux), on peut trouver un domaine fondamental en forme de L, formé de deux rectangles accolés; l'action du flot dilate les bases de ces