

# 3. Une autre présentation du flot géodésique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 3. UNE AUTRE PRÉSENTATION DU FLOT GÉODÉSIQUE

Nous allons donner une autre interprétation de ce flot: on peut considérer une matrice  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  de  $SL(2, \mathbf{R})$  comme formée de deux vecteurs lignes  $e_1^t = (a, c)$  et  $e_2^t = (b, d)$ . On lui associe ainsi une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbf{R}^2$  orientée dans le sens positif et dont le «carré unité»  $\{xe_1 + ye_2, 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$  est de volume 1. La multiplication à droite de cette matrice par une matrice  $M$  correspond, si l'on considère les vecteurs, à l'action standard sur le plan  $\mathbf{R}^2$  de la matrice transposée  $M^t$ . Le flot géodésique consiste à «aplatir» la base donnée sur l'axe des abscisses, et l'espace quotient  $SL(2, \mathbf{R})/SO(2, \mathbf{R})$  s'interprète comme espace des bases à isométrie près. On peut facilement retrouver le modèle de Poincaré: si nous assimilons  $\mathbf{R}^2$  à  $\mathbf{C}$ , on peut associer à une base  $(e_1, e_2)$  un couple  $(z_1, z_2)$  de nombres complexes, et définir une application

$$\begin{aligned} \phi: SL(2, \mathbf{R}) &\rightarrow \mathbf{H} \\ (e_1, e_2) &\mapsto z = z_2/z_1. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\phi$  est invariante par isométrie, et son image appartient au demi-plan supérieur; c'est une version explicite de l'identification donnée au paragraphe précédent entre le demi-plan de Poincaré et le quotient  $SL(2, \mathbf{R})/SO(2, \mathbf{R})$ .

La multiplication à gauche par un élément  $\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  de  $SL(2, \mathbf{Z})$  remplace  $(e_1, e_2)$  par  $(ae_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2)$ , qui est une autre base du même réseau  $\mathbf{Z}e_1 + \mathbf{Z}e_2$ , et l'on obtient de cette façon toutes les bases directes de ce réseau. Le quotient à gauche  $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$  est donc l'espace des réseaux.

Pour pouvoir décrire explicitement le flot géodésique, il nous faut disposer de coordonnées sur cet espace des réseaux, c'est-à-dire donner une façon de choisir une base pour un réseau donné. La méthode classique est celle de Minkowski, qui consiste à choisir pour  $e_1$  le plus court vecteur du réseau (bien défini au signe près, sauf si le réseau est carré ou hexagonal), et pour  $e_2$  le plus court vecteur du réseau qui soit indépendant de  $e_1$  et forme une base positivement orientée (bien défini, sauf si le réseau est hexagonal). Cette méthode est évidemment équivariante par toute isométrie, et il est facile de vérifier que les bases obtenues se projettent, via l'application  $\phi$ , sur le domaine fondamental de l'action de  $SL(2, \mathbf{Z})$  sur  $\mathbf{H}$  que nous avons défini dans la section 2. L'action triviale de  $-Id$  sur le fibré unitaire tangent correspond au

fait que la méthode de Minkowski donne pour chaque réseau deux bases opposées l'une de l'autre; les réseaux pour lesquels cette méthode fournit plus de deux bases (réseaux carrés et hexagonaux) sont projetés sur les deux points singuliers de la surface modulaire.

#### 4. UN SYSTÈME DE COORDONNÉES SUR L'ESPACE DES RÉSEAUX

Nous allons définir une autre méthode pour fixer des coordonnées, qui conduit à des calculs plus faciles. Etant donné un réseau dans  $\mathbf{R}^2$  (identifié à  $\mathbf{C}$  pour la commodité de notation), on définit pour chaque point  $x$  du réseau l'intervalle horizontal ouvert  $H_x = ]x - 1, x + 1[$ . La demi-droite verticale issue de  $x$  recoupe au moins un autre intervalle horizontal: en effet, soit le réseau contient un vecteur vertical, et cette demi-droite rencontre un autre point du réseau, soit il n'en contient pas, donc les deux vecteurs d'une base du réseau ont des abscisses rationnellement indépendantes, et il y a des points du réseau arbitrairement proches de la demi-droite.

Soit  $H_y$  le premier intervalle rencontré, et supposons que le point de rencontre soit à gauche de  $y$ . Ce point de rencontre peut s'écrire  $x + ic = y - a$ ; on appellera  $V_x$  l'intervalle vertical  $[x, x + ic[$  qu'il définit. On prolonge ensuite vers la droite tous les intervalles horizontaux jusqu'à rencontrer un intervalle vertical, ce qui est toujours possible par un raisonnement du même type que ci-dessus. Par symétrie, pour tout intervalle  $V_x$ , il existe un seul  $H_z$  dont le prolongement le coupe; on écrira  $z + b = x + id$  le point d'intersection. Il est clair que  $(a, c)$  et  $(-b, d)$  sont des vecteurs du réseau, et on vérifie sans peine qu'ils forment une base (cf. Fig. 4; en fait, cette construction donne un domaine fondamental pour le réseau formé de deux rectangles, l'un de base  $a$  et de hauteur  $d$ , l'autre de base  $b$  et de hauteur  $c$ ). On vérifie immédiatement que l'on a, par construction,  $0 < a < 1 \leq b$  et  $0 \leq d < c$ .

Si le premier point de rencontre avec  $H_y$  est à droite de  $y$ , on peut faire la construction symétrique, et on obtient une base  $(a, c)$ ,  $(-b, d)$  avec  $0 < b < 1 \leq a$  et  $0 \leq c < d$ .

Cette construction tombe en défaut dans deux cas:

— si le premier point d'intersection est égal à  $y$ ; dans ce cas le réseau contient un vecteur vertical, et on peut trouver une base de la forme  $(0, c)$ ,  $(-b, d)$  avec  $d < c$ ,  $b \geq 1$  (et aussi une base de la forme  $(a, c)$ ,  $(0, d)$  avec  $c < d$ ,  $a \geq 1$ );

— si le premier point d'intersection est contenu dans deux intervalles horizontaux, et dans ce cas le réseau contient un vecteur horizontal, et il y a une base de la forme  $(a, 0)$ ,  $(-b, d)$ , avec  $b < a < 1$ .