6. La constante de Lévy et le volume du fibré tangent à la surface modulaire

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

6. La constante de Lévy et le volume du fibré tangent à la surface modulaire

Si l'on tronque à l'ordre n le développement en fraction continue d'un nombre $x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, on obtient un nombre rationnel p_n/q_n, appelé convergent d'ordre n de x. Ces nombres se calculent facilement par récurrence, et on a les formules:

$$p_0 = 0 \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{si} \quad n \geqslant 2$$
$$q_0 = 1 \quad q_1 = a_1 \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{si} \quad n \geqslant 2\,.$$

Les convergents sont les meilleures approximations rationnelles de x, ils satisfont $|x - p_n/q_n| < 1/q_n^2$. Pour évaluer la vitesse d'approximation, il est intéressant de connaître la croissance des q_n; celle-ci est donnée, pour presque tout nombre, par la proposition suivante, due à Lévy [Le].

Proposition. *Pour presque tout nombre, la suite des dénominateurs des convergents satisfait:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12 \log 2}\,.$$

Preuve. Nous allons étudier la géodésique issue de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$. Notons $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ ses temps successifs d'intersection avec la surface $\tilde{\Sigma}$; quitte à écarter un ensemble de mesure nulle, nous pouvons supposer qu'il y a une infinité d'intersections. On définit une suite x_n par $x_{-1} = 1$, $x_0 = x$, $x_{n+1} = x_{n-1} - a_{n+1} x_n$; on vérifie facilement que $x_n/x_{n-1} = T^n(x)$. On montre par récurrence que le point d'intersection d'ordre $2n$ avec Σ est donné par:

$$\begin{pmatrix} x_{2n-1} & q_{2n-1} \\ -x_{2n} & q_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\tau_{2n}/2} & 0 \\ 0 & e^{-\tau_{2n}/2} \end{pmatrix}$$

et une formule analogue pour l'intersection d'ordre $2n+1$; le point essentiel consiste à voir que l'on passe d'un point au suivant en multipliant à droite par une matrice diagonale correspondant au flot, et à gauche par une matrice entière correspondant à un changement de coordonnées; cette matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{2n} & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & a_{2n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, suivant la parité.

On a le lemme suivant:

LEMME. *Soit* $\begin{pmatrix} 1 & c \\ -b & d \end{pmatrix}$ *un élément de* Σ_0; *on a toujours* $1/2 \leqslant d \leqslant 1$.

Preuve du lemme. On a $d + bc = 1, b$ et c sont positifs, donc d est inférieur à 1; comme c est inférieur à d et b inférieur à $1, 2d$ est supérieur à 1, d'où le résultat. □

Suite de la preuve. Appliqué aux points calculés plus haut, ce lemme implique que, pour tout point x, on a: $1/2 \leqslant q_n e^{-\tau_n/2} \leqslant 1$. Si l'orbite de x recoupe une infinité de fois la surface de section, en prenant le logarithme et en divisant par n, on en déduit:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log q_n}{n} - \frac{\tau_n}{2n} = 0 .$$

Autrement dit, le terme qui apparaît dans le théorème de Lévy est la moitié du temps de retour moyen le long de l'orbite. Compte tenu du fait que le temps de premier retour d'un point $\begin{pmatrix} 1 & c \\ x & d \end{pmatrix}$ ne dépend que de x, et du codage donné au paragraphe précédent, on voit que, si l'on appelle $\tau(x)$ la fonction temps de premier retour, on a:

$$\frac{\tau_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(T^i x) .$$

Cette expression est la somme de Birkhoff associée à la fonction temps de retour. Mais on sait que le flot géodésique sur la surface modulaire est ergodique; donc cette fonction tend presque partout vers une constante, qui est la moyenne du temps de premier retour sur la surface $\tilde{\Sigma}$. Cette moyenne est elle-même le quotient, par le volume de la surface, de l'intégrale de ce temps de retour sur $\tilde{\Sigma}$, qui n'est autre que le volume de l'espace tout entier. Cet espace est le fibré tangent à la surface modulaire. Cette surface est d'aire $\pi/3$, puisqu'elle admet dans le plan hyperbolique un domaine fondamental qui est un triangle isocèle d'angle $0, \pi/3, \pi/3$; il suffit pour obtenir l'aire d'appliquer la formule de Gauss pour les triangles hyperboliques. Le fibré tangent a pour fibre $PSO(2, \mathbf{R})$, qui est de longueur π (ne pas oublier que $-Id$ agit de façon triviale, c'est pour cela que la fibre a pour longueur π et non 2π comme on s'y attend); le volume total de l'espace est donc $\pi^2/3$.

On a vu plus haut que l'aire de $\tilde{\Sigma}$ est $2 \log 2$; le temps de retour moyen est donc $\pi^2/(6 \log 2)$, et compte tenu du facteur 2 introduit dans le calcul, on retrouve bien la constante cherchée. □