

# 7. Un codage du flot géodésique sur un alphabet fini

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 7. UN CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR UN ALPHABET FINI

Un choix différent de la surface de section conduit à retrouver d'autres algorithmes de fractions continues. En particulier, si, dans la procédure donnée au paragraphe 4, on inverse les deux dernières étapes, c'est-à-dire si on prolonge le segment vertical jusqu'à rencontrer une deuxième fois le segment horizontal avant de poursuivre celui-ci (cf. Fig. 6), on obtient un domaine fondamental différent, caractérisé par  $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 1 + a$ , sans condition sur les deux autres coefficients, sauf  $ad + bc = 1$ .

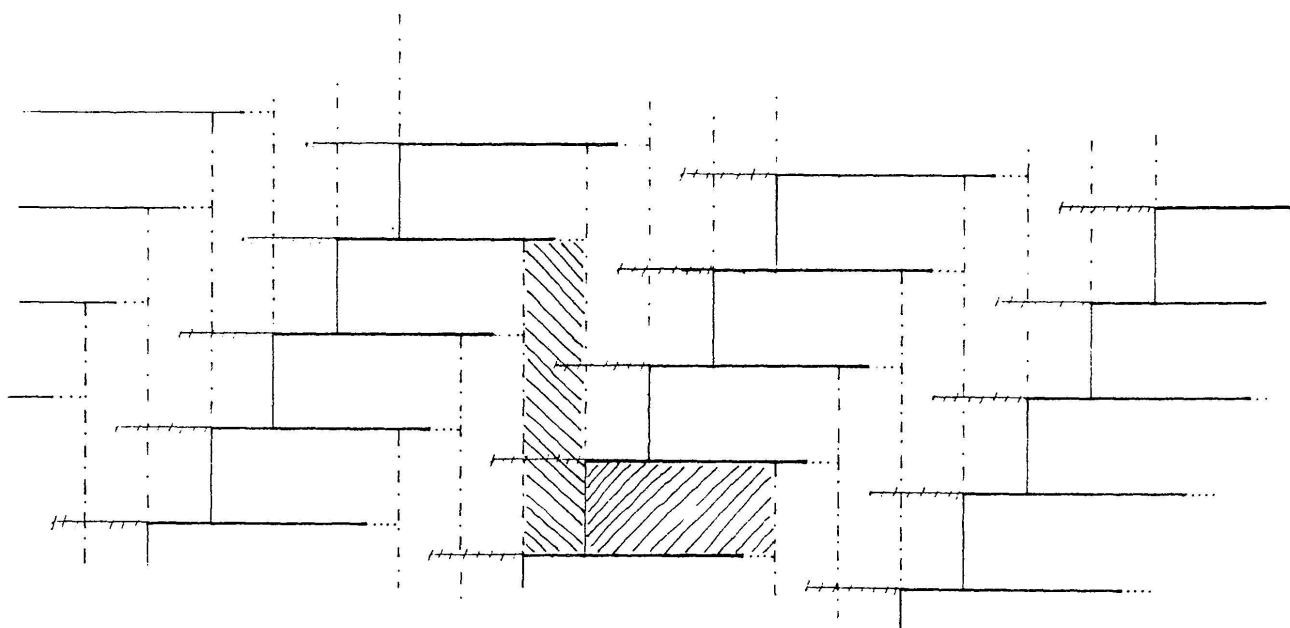


FIGURE 6

On peut alors refaire la même étude qu'au paragraphe 5, en définissant deux domaines  $\Omega'_0$  et  $\Omega'_1$ , avec des faces rentrantes et sortantes. L'une des faces rentrantes,  $\Sigma'_0$ , est formée des matrices du type  $\begin{pmatrix} a & c \\ -1 & d \end{pmatrix}$ , avec  $a < 1$  et  $c, d$  positifs, et  $\Sigma'_1$  est définie de façon symétrique. La surface de section sur laquelle on définit l'application de premier retour est  $\Sigma'_0 \cup \Sigma'_1$ .

On peut paramétrer  $\Sigma'_0$  par  $a$  et  $c$ , tous deux compris entre 0 et 1, et  $\tilde{\Sigma}'$  par  $(a, c, \varepsilon)$ , avec  $\varepsilon = 0$  ou 1. Un calcul simple montre que l'application de premier retour en  $\tilde{\Sigma}'$  est donnée par

$$\tilde{T}'_1: \tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}'$$

$$(a, c, \varepsilon) \mapsto \left( \frac{a}{1-a}, c(1-a), \varepsilon \right) \quad \text{si } a < \frac{1}{2}$$

$$(a, c, \varepsilon) \mapsto \left( \frac{1-a}{a}, 1 - c(1-a), 1 - \varepsilon \right) \quad \text{si } a \geq \frac{1}{2}.$$

C'est un revêtement d'ordre 2 de l'application représentée ci-dessous (cf. Fig. 7); elle a un domaine de définition très simple, mais des formules un peu compliquées (en particulier, elle ne préserve pas la mesure de Lebesgue). En utilisant la partition de Markov naturelle pour cette fonction, on peut coder le flot géodésique par un alphabet à deux lettres.

En utilisant comme coordonnées non plus  $(a, c)$  mais  $(a, d)$ , avec  $0 \leq a < 1$  et  $0 \leq d < 1/a$ , on trouve pour l'application de premier retour la forme suivante:

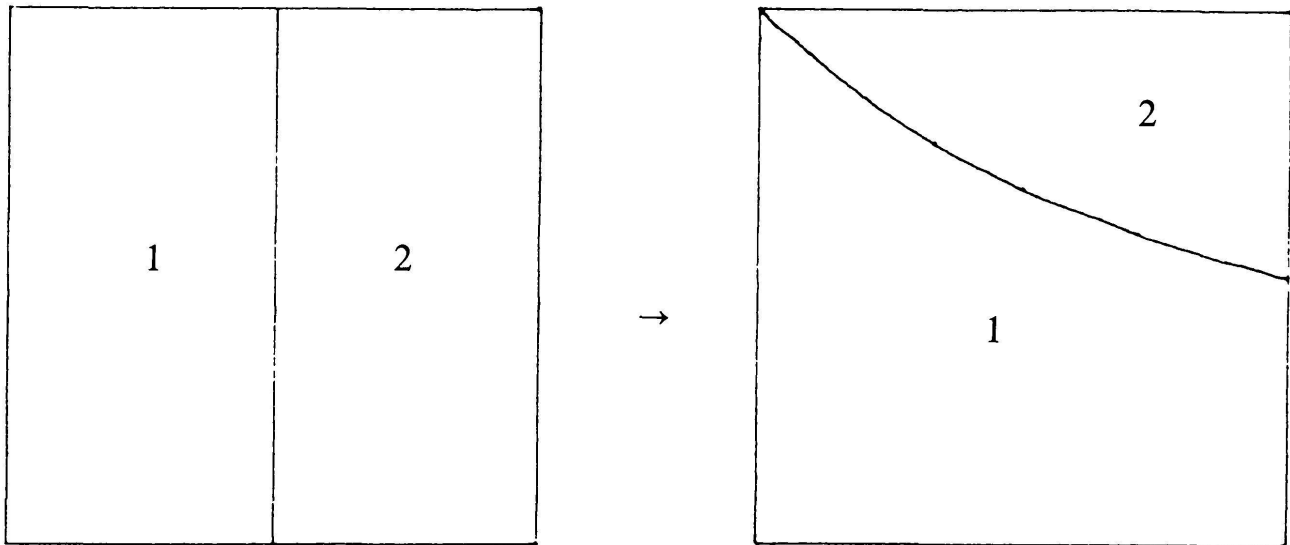


FIGURE 7

$$\tilde{T}' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}'$$

$$(a, d, \varepsilon) \mapsto \left( \frac{a}{1-a}, d(1-a)^2 + (1-a), \varepsilon \right) \quad \text{si } a < \frac{1}{2}$$

$$(a, d, \varepsilon) \mapsto \left( \frac{1-a}{a} a - a^2 d, 1 - \varepsilon \right) \quad \text{si } a \geq \frac{1}{2}.$$

C'est un revêtement de l'application schématisée dans la figure 8; cette application préserve la mesure de Lebesgue, et son domaine est de mesure infinie.

Dans les deux cas, l'application de premier retour se projette sur la première coordonnée en l'application  $T'$  de l'intervalle  $[0, 1]$  définie par  $T'(x) = x/(1-x)$  si  $x < 1/2$ ,  $T'(x) = (1-x)/x$  si  $x \geq 1/2$ . On peut voir cette application comme la version projective de l'algorithme qui consiste à prendre deux nombres positifs  $a$  et  $b$ , à soustraire le plus petit du plus grand et à itérer l'opération; on réalise ainsi l'algorithme d'Euclide en ne faisant que des soustractions, donc avec beaucoup d'étapes intermédiaires. Il s'agit d'une

version «lente» de l'algorithme des fractions continues: si  $x$  est compris entre  $1/(n+1)$  et  $1/n$ , alors  $\{1/x\} = T'^n(x)$ .

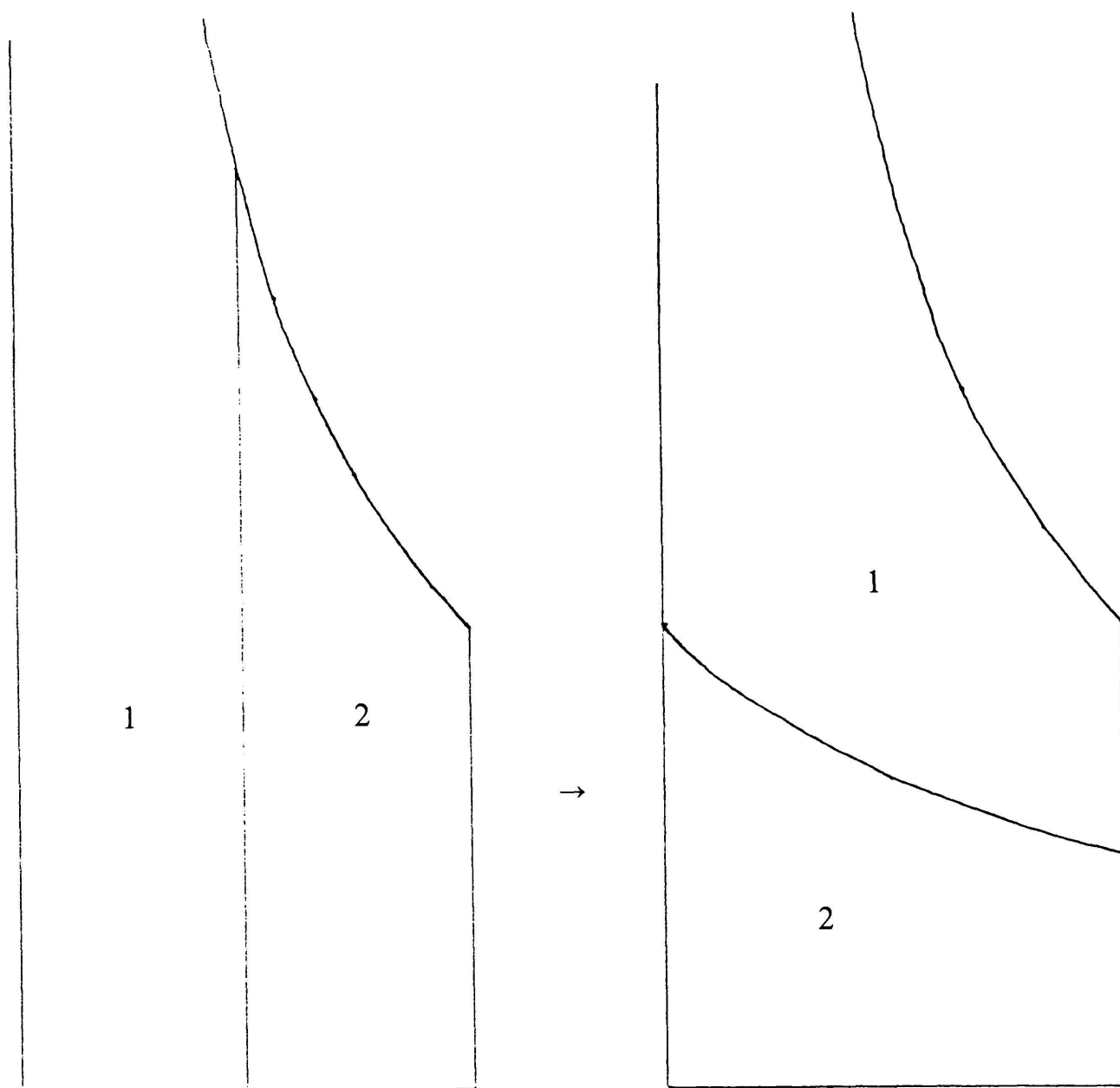


FIGURE 8

## RÉFÉRENCES

- [AF] ADLER, R. and L. FLATTO. Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc.* 25 (1991), 229-334.
- [AN] ARNOUX, P. et A. NOGUEIRA. Mesures de Gauss pour des algorithmes de fractions continues multidimensionnelles. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 26 (1993), 645-664.
- [Ar] ARTIN, E. Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 3 (1924), 170-175.