

## 5. The deficiency

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Thus,

$$f(u) = \prod_{i \in S} (1 + (q_i - 1)x_i) \cdot \prod_{i \in S'} (1 - x_i),$$

where  $S \subset \{1, \dots, s\}$  is the set of indices  $i$  for which  $u_i = 0$ , and  $S' \subset \{1, \dots, s\}$  the set of indices  $i$  for which  $u_i \neq 0$ .

Another way of writing  $f(u)$  is

$$f(u) = \prod_{i=1}^s (1 - x_i)^{w(u_i)} \cdot (1 + (q_i - 1)x_i)^{1 - w(u_i)}.$$

Plugging this formula into  $\sum_{u \in M} f(u)$ , we get

$$\begin{aligned} \sum_{u \in M} f(u) &= \prod_{i=1}^s (1 + (q_i - 1)x_i) \cdot \sum_{u \in M} \prod_{i=1}^s \left( \frac{1 - x_i}{1 + (q_i - 1)x_i} \right)^{w(u_i)} \\ &= \prod_{i=1}^s (1 + (q_i - 1)x_i) \cdot P_M \left( \frac{1 - x_1}{1 + (q_1 - 1)x_1}, \dots, \frac{1 - x_s}{1 + (q_s - 1)x_s} \right). \end{aligned}$$

Comparing the two expressions for  $\sum_{u \in M} f(u)$ , we get the theorem.

## 5. THE DEFICIENCY

The main further necessary condition for a root system to be contained in an even unimodular lattice of the same rank is provided by the notion of deficiency (Defekt) introduced and studied in [KV].

If  $R$  is a root system of rank  $n$ , the *deficiency* of  $R$ , denoted  $d(R)$ , is the difference  $n - m$ , where  $m$  is the maximal cardinality of a set  $\{a_1, \dots, a_m\} \subset R$  of mutually orthogonal roots

$$(a_i, a_j) = 2\delta_{ij}, \quad \text{for all } 1 \leq i, j \leq m.$$

We use this notion only if all roots in  $R$  have the same scalar square 2.

If  $R = R_1 \boxplus R_2$ , then  $d(R) = d(R_1) + d(R_2)$ . The values of the deficiency for the irreducible root systems are

$$\begin{aligned} d(\mathbf{A}_l) &= \left[ \frac{l}{2} \right], \\ d(\mathbf{D}_l) &= \begin{cases} 0 & \text{for } l \text{ even,} \\ 1 & \text{for } l \text{ odd,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$d(\mathbf{E}_6) = 2, \quad d(\mathbf{E}_7) = d(\mathbf{E}_8) = 0.$$

By Satz 5 of [KV], if  $R$  is the (complete) root system of an even unimodular lattice of rank 32, then

$$d(R) = 0, 8, 12, 14, 15 \text{ or } 16 .$$

The proof consists in constructing from the given lattice a new lattice  $L$ , still of rank 32 and containing the orthogonal sum of  $m = 32 - d(R)$  copies of  $\mathbf{Z}$ . Thus,  $L = \mathbf{Z}^m \boxplus L_0$ , where  $L_0$  is again unimodular and of rank  $d(R)$ . (Hence,  $\text{rank}(L_0) \leq 16$ .)

By Martin Kneser's classification of unimodular (positive definite) lattices of rank  $\leq 16$ , the rank of  $L_0$ , i. e.  $d(R)$  can only take the above values. (See [Kn], Satz 1.)

In setting up the tables we conveniently use the deficiency to discriminate the various root systems  $R$  according to the value of  $d(R)$ .

## 6. THE TABLES

We now proceed to list the *indecomposable* even unimodular lattices  $L$  of rank 32 with a complete root system  $R$ .

The presence in  $R$  of a factor of type  $\mathbf{E}_8$  would produce a unimodular sublattice  $\mathbf{Z}\mathbf{E}_8 = L_0 \subset L$ , and hence a decomposition  $L = L_0 \boxplus L_1$  for some (even) unimodular  $L_1$  of rank 24. Hence, we assume throughout that  $R$  has the form

$$R = \mathbf{A}_{l_1} \boxplus \dots \boxplus \mathbf{A}_{l_r} \boxplus \mathbf{D}_{m_1} \boxplus \dots \boxplus \mathbf{D}_{m_s} \boxplus \mathbf{m}\mathbf{E}_6 \boxplus \mathbf{n}\mathbf{E}_7 ,$$

with no factor of type  $\mathbf{E}_8$ .

Altogether there are  $N = 88523$  such systems (of rank 32). The possible dimensions for  $\mathbf{m}\mathbf{E}_6 \boxplus \mathbf{n}\mathbf{E}_7$  are

$$D = \{0, 6, 7, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32\}$$

and for  $d \in D$ , there is a unique pair  $(m, n)$  such that  $d = 6m + 7n$ . Hence

$$N = \sum_{d \in D} \sum_{i=0}^{32-d} p(i)q(32-d-i) ,$$

where  $p(i)$  is the number of partitions of  $i$  and  $q(j)$  is the number of partitions  $(j_1, \dots, j_t)$  of  $j$  with  $4 \leq j_1 \leq \dots \leq j_t$ . (Of course, we use the convention  $p(0) = q(0) = 1$ .)

Among these, only 21209 have an acceptable deficiency, i. e.  $d = 0, 8, 12, 14, 15$  or 16. They are distributed as follows: