

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{array}{ccc}
 H(G) & \xrightarrow{\psi^*} & [H(G/T) \otimes H(T)]^W . \\
 p_k^* \downarrow & & \downarrow 1 \otimes p_k^* \\
 H(G) & \xrightarrow{\psi^*} & [H(G/T) \otimes H(T)]^W .
 \end{array}$$

Since  $p_k^*$  acts by  $k^q$  on  $H^q(T)$ , (6.1) implies that  $H^n(G)_q \simeq [H^{n-q}(G/T) \otimes H^q(T)]^W$ , and (6.3) gives the dimension of the latter space.

(6.6) This last interpretation of the bigrading shows that it is natural in the following sense. Suppose  $f: K \rightarrow G$  is a homomorphism between two compact connected Lie groups. Since  $f$  commutes with the power maps  $P_k$  on  $G$  and  $K$ , the cohomology map  $f^*$  sends  $H^n(G)_q$  to  $H^n(K)_q$ . Suppose for example that  $K$  is a closed connected subgroup of  $G$  and  $f$  is the inclusion map. Choose, as we may, a maximal torus  $T$  of  $G$  such that  $S := T \cap K$  is a maximal torus of  $K$ . The restriction map  $H(G) \rightarrow H(K)$  becomes, via (6.1), the map  $[H(G/T) \otimes H(T)]^W \rightarrow [H(K/S) \otimes H(S)]^{W_K}$  induced by restriction on each factor, where  $W_K$  is the Weyl group of  $S$  in  $K$ .

(6.7) We close with the homology interpretation of (6.1), which says the homology map  $\psi_*$  induced by  $\psi$  is surjective. It follows that the homology of  $G$  is spanned by the cycles  $[\psi(\bar{X}_w, T_I)] = \{gtg^{-1}: gT \in \bar{X}_w, t \in T_I\}$ . Here  $w \in W$ ,  $X_w$  is the Schubert cell (see (5.2)) and  $T_I = \prod_{i \in I} T_i$ , where  $T = T_1 \times \cdots \times T_l$ , with each  $T_i \simeq S^1$ . Using the results in [BGG], one can explicitly write down the action of  $W$  on  $H_*(G/T)$  in terms of the Schubert cell basis, and this leads, in principle, to the linear relations in  $H_*(G)$  satisfied by the cycles  $[\psi(\bar{X}_w, T_I)]$ .

#### REFERENCES

- [A] ADAMS, J.F. *Lectures on Lie Groups*. W.A. Benjamin, 1969.
- [BGG] BERNSTEIN, I.N., I.M. GEL'FAND and S.I. GEL'FAND. Schubert cells and cohomology of the spaces  $G/P$ . *Representation theory — selected papers*. Cambridge University Press, 1982, 115-139.
- [Bo1] BOREL, A. Topology of Lie groups and characteristic classes. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1955), 397-432.
- [Bo2] ——— Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. *Ann. Math.* 57 (1953), 115-207.
- [Bk] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, Paris, 1968.
- [BT] BOTT, R. and L. TU. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer Verlag, 1982.

- [C] COLEMAN, A.J. The Betti numbers of the simple Lie groups. *Can. J. Math.* 10 (1958), 349-356.
- [Ch] CHEVALLEY, C. The Betti numbers of the exceptional Lie groups. *Proc. ICM 2*, 1950, 21-24.
- [C-E] CHEVALLEY, C. and S. EILENBERG. Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948), 85-124.
- [F] FLATTO, L. Invariants of Finite Reflection Groups. *L'Ens. Math.* 24 (1978), 237-292.
- [GHV] GREUB, W., S. HALPERIN and R. VANSTONE. *Connections, Curvature and Cohomology*, vol. I, II, III. Academic Press, 1973.
- [H] HELGASON, S. *Groups and geometric analysis*. Academic Press, 1985.
- [L] LERAY, J. Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux. *Colloque de Topologie*, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Bruxelles, 1950, 101-116.
- [Sam] SAMELSON, H. Topology of Lie groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* 58 (1952), 2-37.
- [Sol] SOLOMON, L. Invariants of finite reflection groups. *Nagoya Jn. Math.* 22 (1963), 57-64.
- [Sp] SPRINGER, T. A construction of representations of Weyl groups. *Inv. Math.* 44 (1978), 279-293.
- [S] STEINBERG, R. Differential equations invariant under finite reflection groups. *Trans. A.M.S.* 112 (1963), 392-400.
- [V] VARADARAJAN, V.S. *Lie groups, Lie algebras and their representations*. Springer Verlag GTM, 1984.

(Reçu le 15 mai 1994)

Mark Reeder

University of Oklahoma  
Dept. of Mathematics  
Norman, Oklahoma 73019, USA  
e-mail: mreeder@uoknor.edu