

# 1. Groupoïdes et espaces projectifs

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## BIRAPPORT ET GROUPOÏDES

par Jean-Louis CATHELINÉAU

Soit  $F$  un corps et  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, on associe à l'espace projectif  $\mathbf{P}^n(F)$  un groupoïde; ce groupoïde, défini par générateurs et relations de manière purement géométrique, fait apparaître très naturellement le groupe multiplicatif du corps et le classique birapport. Une structure analogue existe plus généralement pour les grassmanniennes. Ces considérations amènent à une présentation géométrique élémentaire de l'homologie du groupe linéaire en terme de grassmanniennes, en analogie avec la situation topologique classique, et illustre aussi l'intérêt (voir entre autres [3, 10]) de considérer pour un groupe discret  $G$ , des catégories, autres que la classique catégorie à un objet, dont le réalisé est aussi un espace d'Eilenberg-MacLane  $K(G, 1)$ . Ce qui suit espère montrer la dimension géométrique de ce point de vue, dans la ligne des idées de F. Klein. On discute aussi quelques extensions naturelles du birapport pour certaines configurations de points ou de sous-espaces de l'espace projectif.

Ces résultats m'ont été inspirés par quelques aspects d'un travail de Goncharov sur la conjecture de Zagier [9, 8, 4].

### 1. GROUPOÏDES ET ESPACES PROJECTIFS

#### 1.1 PRÉSENTATION D'UN GROUPOÏDE PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

Rappelons qu'une *petite catégorie* est une catégorie dont les objets forment un ensemble, et qu'un *groupoïde* est une petite catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes. Un groupoïde est dit *connexe* si, entre deux de ses objets, il existe toujours un morphisme. Dans la suite tous les groupoïdes sont supposés connexes. Dans un groupoïde, les automorphismes d'un objet forment un groupe et tous ces groupes d'automorphismes sont isomorphes. Un groupe s'identifie à un groupoïde avec un seul objet et tout groupoïde est équivalent, au sens des catégories, à un tel groupoïde.

Mais il faut se garder de croire que la théorie des groupoïdes se réduit à celle des groupes. Pour un aperçu général sur la théorie des groupoïdes et leurs applications on renvoie à l'exposé de R. Brown [3].

Comme la notion de groupoïde généralise celle de groupe, il n'est pas surprenant que l'on puisse présenter un groupoïde par générateurs et relations.

Pour cela considérons les données suivantes

- i) un ensemble d'objets  $X$ ,
- ii) un ensemble  $\mathcal{F}$  de générateurs donné par des «flèches»  $f : x \rightarrow y$  entre les éléments de  $X$ ,
- iii) un ensemble  $\mathcal{R}$  de relations entre les éléments de  $\mathcal{F}$  du type

$$f_r^{\varepsilon_r} \circ f_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}} \circ \cdots \circ f_1^{\varepsilon_1} = id_x (\varepsilon_j = \pm 1),$$

où l'extrémité de la flèche  $f_i$  coïncide avec l'origine de  $f_{i+1}$ .

PROPOSITION 1. *Il existe, à isomorphisme près, un et un seul groupoïde  $\mathcal{G}$ , d'ensemble d'objets  $X$ , muni d'une application  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{G}$  compatible avec les objets, satisfaisant de plus à la propriété universelle suivante:*

«Pour tout groupoïde  $\mathcal{H}$ , pour toute application  $h : X \rightarrow \text{Obj } \mathcal{H}$ , et pour toute application  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{H}$  compatible avec  $h$  vérifiant:  $\psi(f_r)^{\varepsilon_r} \circ \psi(f_{r-1})^{\varepsilon_{r-1}} \circ \cdots \circ \psi(f_1)^{\varepsilon_1} = id_{h(x)}$  pour chaque relation de  $\mathcal{R}$ , il existe un unique morphisme de groupoïdes

$$\tilde{\psi} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$$

tel que

$$\tilde{\psi} \circ \phi = \psi . \gg$$

*Esquissons la preuve:* on commence par construire le groupoïde «libre»  $\mathcal{L}$  engendré par les données  $X$  et  $\mathcal{F}$ . Pour ce faire, on introduit le graphe orienté  $\Gamma$  dont les *sommets* sont les éléments de  $X$  et dont les *arêtes* sont de l'un des types  $x \xrightarrow{f} y$  ou  $y \xrightarrow{\hat{f}} x$ , pour  $f : x \rightarrow y$  élément de  $\mathcal{F}$  (on suppose que ce graphe est connexe). Le groupoïde  $\mathcal{L}$  a alors pour objets les éléments de  $X$  et, pour morphismes, les classes d'équivalences de chemins orientés sur le graphe  $\Gamma$ , relativement à la relation d'équivalence engendrée par les relations élémentaires suivantes: deux chemins sont élémentairement équivalents si l'on passe de l'un à l'autre en remplaçant une séquence

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\hat{f}} x$  (resp.  $y \xrightarrow{\hat{f}} x \xrightarrow{f} y$ ) par  $x$  (resp.  $y$ ). La composition dans  $\mathcal{L}$  s'obtient en composant les chemins; l'inverse de la classe de  $x \xrightarrow{f} y$  est alors la classe de  $y \xrightarrow{\hat{f}} x$ .

Le groupoïde  $\mathcal{G}$  se déduit de  $\mathcal{L}$  en passant au quotient par les relations  $\mathcal{R}$ . Plus précisément, les relations  $\mathcal{R}$  engendrent une famille de groupes  $(G_x)_{x \in X}$ , où  $G_x$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}_{\mathcal{L}}(x)$ , satisfaisant à la condition

(\*) pour tout morphisme  $f : x \rightarrow y$  de  $\mathcal{L}$ , la conjugaison:  $\text{Aut}_x \rightarrow \text{Aut}_y$ ,  $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$ , induit une bijection de  $G_x$  sur  $G_y$ ;

on obtient alors  $\mathcal{G}$  à partir de  $\mathcal{L}$  en passant au quotient par la relation d'équivalence suivante sur les morphismes de  $\mathcal{L}$

(\*\*) pour  $f, g \in \text{Mor}(x, y)$ ,  $f \sim g$  si  $g^{-1} \circ f \in G_x$ .  $\square$

DÉFINITION 1. Pour  $F$  un corps et  $l \geq 1$ ,  $\mathcal{V}_{n,l}$  désigne le groupoïde dont les objets sont les sous-espaces de dimension  $l$  de  $F^{n+1}$  et les morphismes, les isomorphismes linéaires entre ces espaces. Pour  $l = 1$ , on note plus simplement ce groupoïde  $\mathcal{V}_n$ .

Dans les paragraphes 1.2 et 2.1, on donne pour  $n \geq 3l - 1$  une présentation par générateurs et relations du groupoïde  $\mathcal{V}_{n,l}$ , en termes de géométrie projective.

## 1.2 LE GROUPOÏDE DES POINTS DE $\mathbf{P}^n(F)$

Dans la suite,  $F$  est un corps commutatif quelconque, en particulier on n'exclut pas le corps à deux éléments.

DÉFINITION 2. Pour  $n \geq 2$ , on considère le groupoïde  $\mathcal{G}_n$  défini par générateurs et relations comme suit:

- i) Les objets de  $\mathcal{G}_n$  sont les points de  $\mathbf{P}^n(F)$ .
- ii) L'ensemble des générateurs  $\mathcal{F}$  est constitué des flèches  $f = (x \xrightarrow{a} y)$ , où  $x$  et  $y$  sont des points distincts de  $\mathbf{P}^n(F)$  et  $a$  est un point de la droite  $\langle x, y \rangle$  distinct de  $x$  et  $y$ .
- iii) Les relations  $\mathcal{R}$  sont du type  $h = g \circ f$  où  $f = (x \xrightarrow{a} y)$ ,  $g = (y \xrightarrow{b} z)$  et  $h = (x \xrightarrow{c} z)$  sont comme sur la figure 1, c'est-à-dire que  $x, y$  et  $z$  sont en position générale et  $c$  est l'intersection des droites  $\langle x, z \rangle$  et  $\langle a, b \rangle$ .

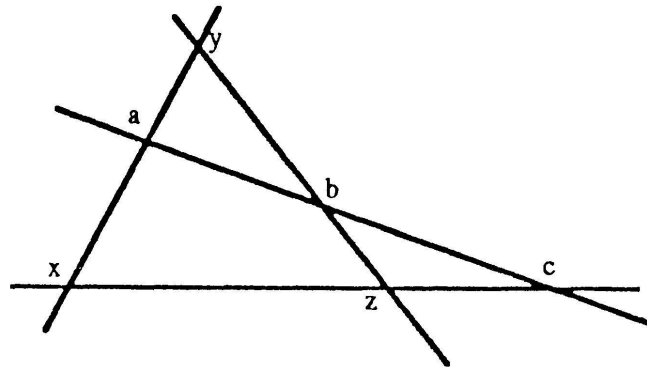


FIGURE 1

Un triangle comme sur la figure 1 est une cubique dégénérée; noter alors l'analogie avec la définition de la loi de groupe sur une cubique non singulière. On peut dire aussi que les relations  $\mathcal{R}$  sont données par les configurations de Menelaüs: rappelons que le théorème de Menelaüs exprime l'alignement des points  $a, b, c$ , sur la figure 1, par la condition affine  $\frac{ax}{ay} \frac{by}{bz} \frac{cz}{cx} = 1$ .

On rappelle que si  $F$  a au moins trois éléments et si  $x, y, a, b$  sont quatre points distincts de  $\mathbf{P}^n(F) = F \cup \{\infty\}$ , il existe un unique élément  $r(x, y; a, b) \in F^\times$  et une unique homographie  $f \in PGL(2, F)$  tels que

$$(f(x), f(y), f(a), f(b)) = (\infty, 0, 1, r(x, y; a, b)) .$$

L'élément  $r(x, y; a, b) = \frac{x-a}{x-b} \frac{y-b}{y-a}$  est le birapport des quatre points  $x, y, a, b$ ; pour les généralités sur le birapport, voir par exemple [1].

Dans la suite on convient que  $r(x, y; a, b) = 1$ , si  $a = b$ .

Noter que le groupe projectif  $PGL(n+1, F)$  opère naturellement dans  $\mathcal{G}_n$  par automorphismes de groupoïdes.

**THÉORÈME 1.** *Le groupoïde  $\mathcal{G}_n$  vérifie les propriétés suivantes*

- 1) *Pour  $x \neq y$ , si  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  alors  $f^{-1} = (y \xrightarrow{a} x)$ .*
- 2) *Pour  $x \neq y$ ,  $Mor(x, y)$  coïncide avec l'ensemble des générateurs de source  $x$  et de but  $y$ .*
- 3) *Pour tout  $x \in \mathbf{P}^n(F)$ , il existe un unique isomorphisme,  $t_x: Aut_{\mathcal{G}_n}(x) \rightarrow F^\times$ , tel que pour  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  et  $g = (y \xrightarrow{a} x)$ ,  $t_x(g \circ f) = r(x, y; a, b)$ . De plus ces isomorphismes sont compatibles avec l'action de  $PGL(n+1, F)$  dans  $\mathcal{G}_n$ .*

Ce théorème est en fait un corollaire du suivant.

THÉORÈME 2. *Il existe un isomorphisme de groupoïdes  $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$  tel que, pour  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  et  $g = (y \xrightarrow{a} x)$ , on a  $\varphi(g \circ f) = r(x, y; a, b)$ .*

Avant de montrer ce dernier résultat, donnons deux illustrations géométriques du théorème 1.

Si  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  et  $g = (y \xrightarrow{a} z)$  sont tels que  $x, y, z$  sont *distincts et alignés*, alors  $g \circ f = (x \xrightarrow{c} z)$ , où  $c$  est le point de  $\langle x, y \rangle$  obtenu par la construction géométrique de la figure 2.

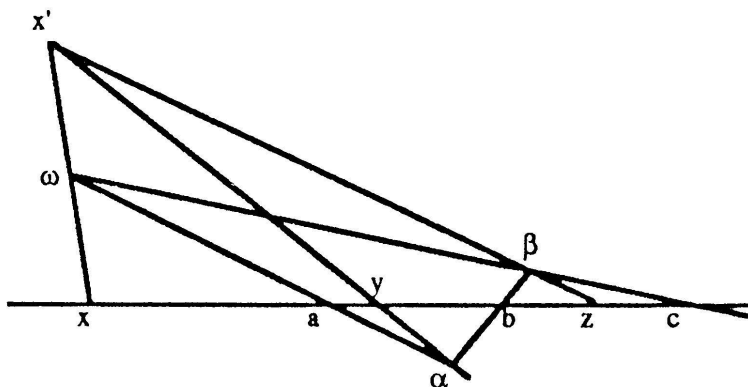


FIGURE 2

Détaillons cette construction: on choisit un point  $x'$  en dehors de la droite  $\langle x, y \rangle$  et un point  $\omega$  sur la droite  $\langle x, x' \rangle$  distinct de  $x$  et  $x'$ . Le point  $\alpha$  correspond alors à la composée  $f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x)$ , le point  $\beta$  à  $g \circ (f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x))$  et le point  $c$  à

$$(g \circ (f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x))) \circ (x \xrightarrow{\omega} x') .$$

L'associativité du groupoïde  $\mathcal{G}_n$  et le point 1) du théorème 1 montrent que cette dernière composition n'est autre que  $g \circ f$ . Le lecteur pourra considérer le cas particulier où  $F$  est le corps à deux éléments et constater que si  $x, y, z$  sont les trois points d'une droite de  $\mathbf{P}^2(F)$ , on a la relation  $(y \xrightarrow{x} z) \circ (x \xrightarrow{z} y) = (x \xrightarrow{y} z)$ . Rappelons que le plan projectif du corps à deux éléments est constitué de 7 points et 7 droites disposés comme sur la figure 3

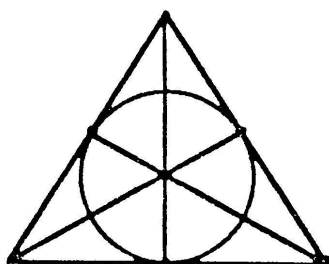


FIGURE 3

L'associativité, dans le cas de trois morphismes où les objets sont en position générale, correspond à la configuration de Desargues de la figure 4.

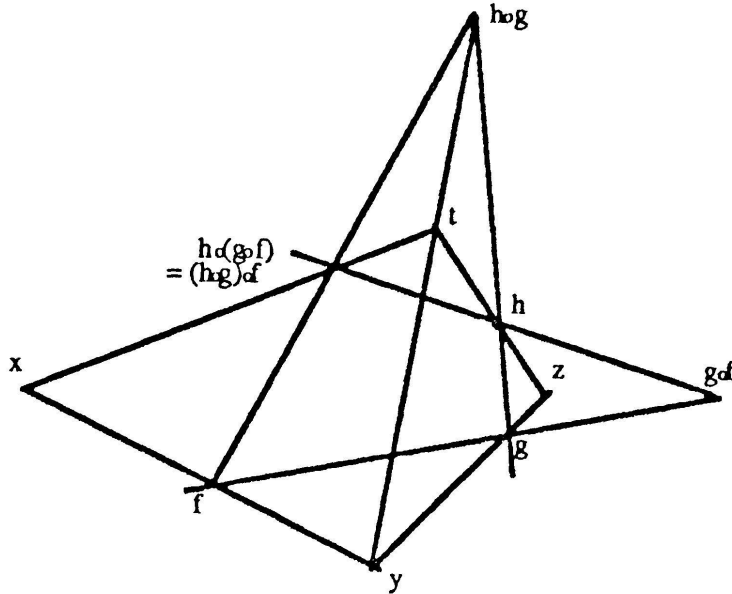


FIGURE 4

Rappelons le théorème de Desargues: si  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  sont deux triangles de l'espace projectif  $\mathbf{P}^n(F)$ , où  $n \geq 2$ , tels que  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$ ,  $z$  et  $z'$  soient distincts, alors les points  $\langle x, y \rangle \cap \langle x', y' \rangle$ ,  $\langle y, z \rangle \cap \langle y', z' \rangle$  et  $\langle x, z \rangle \cap \langle x', z' \rangle$  sont alignés, si et seulement si les droites  $\langle x, x' \rangle$ ,  $\langle y, y' \rangle$  et  $\langle z, z' \rangle$  sont concourrantes.

### 1.3 PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans toute la suite, on note  $p$  l'application quotient  $F^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^n(F)$ .

On va construire un morphisme de groupoïdes  $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ , bijectif sur les ensembles d'objets. Pour prouver que  $\varphi$  est un isomorphisme, il suffira de vérifier que les morphismes induits  $\text{Aut}(x) \rightarrow \text{Aut}(\varphi(x))$  sont des isomorphismes pour tout  $x$  de  $\mathbf{P}^n(F)$ .

On note  $\varphi(x)$  la droite  $p^{-1}(x)$ . Si  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  est un générateur de  $\mathcal{G}_n$ , on définit  $\varphi(f)$  comme l'isomorphisme linéaire:  $p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$ , dont le graphe est la droite conjuguée harmonique de  $p^{-1}(a)$  par rapport à  $p^{-1}(x)$  et  $p^{-1}(y)$ ; autrement dit,  $\varphi(f)$  est caractérisé par le fait que pour un vecteur non nul  $\vec{x} \in p^{-1}(x)$ ,  $\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x}$  appartient à  $p^{-1}(a)$ .

Pour voir que ces données induisent un morphisme  $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ , vérifions la comptabilité avec les relations  $\mathcal{R}$ . Soit  $f, g, h$  comme sur la figure 1, on a

$$\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x} \in p^{-1}(a) \quad \text{et} \quad \varphi(g)(\varphi(f)(\vec{x})) - \varphi(f)(\vec{x}) \in p^{-1}(b),$$

donc  $(\varphi(g) \circ \varphi(f))(\vec{x}) - \vec{x}$  appartient à l'intersection des deux plans

$$\langle p^{-1}(a), p^{-1}(b) \rangle \cap \langle p^{-1}(x), p^{-1}(z) \rangle = p^{-1}(c),$$

ce qui prouve que  $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$ .

Il reste à voir que les morphismes  $Aut(x) \rightarrow Aut(\varphi(x))$  induits par  $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$  sont des isomorphismes. Cela se fait en plusieurs étapes.

Si  $x \neq y$ , l'inverse de  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  est représenté par  $g = (y \xrightarrow{a} x)$ . En effet soit  $z$  en dehors de la droite  $\langle x, y \rangle$  et  $h = (x \xrightarrow{c} z)$ , il suffit de vérifier que  $h \circ (g \circ f) = h$ , ce qui apparaît sur la figure 5 qui montre une construction géométrique de  $(h \circ g) \circ f$ .

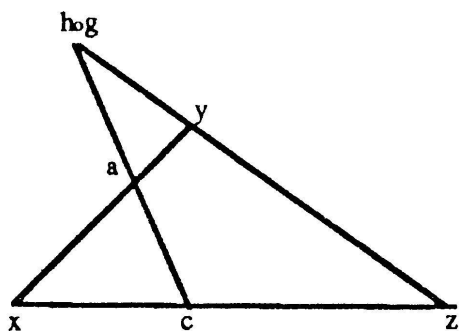


FIGURE 5

L'étape suivante consiste à prouver que tout automorphisme de  $x$  dans  $\mathcal{G}_n$  est représenté par une composée  $(y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$ , où  $x \neq y$ . Par définition de  $\mathcal{G}_n$ , tout morphisme de  $x$  est représenté par un «chemin»

$$x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} x_n.$$

Montrons que le composé d'un tel chemin est égal au composé de deux générateurs. Il suffit de considérer la situation où  $n = 3$ ; soit alors  $z$  en dehors des droites  $\langle x_0, x_1 \rangle$ ,  $\langle x_1, x_2 \rangle$  et  $\langle x_2, x_3 \rangle$  (voir aussi le lemme 1 du paragraphe 2.1 pour une situation plus délicate) et soit  $\omega$  sur la droite  $\langle x_1, z \rangle$ , distinct de  $x_1$  et  $z$ ; l'associativité de la composition et le fait que  $(z \xrightarrow{\omega} x_1) \circ (x_1 \xrightarrow{\omega} z) = id_{x_1}$  montrent que

$$(z \xrightarrow{\omega} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3) \circ (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{\omega} z) = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3),$$

où l'on a identifié une suite de flèches à sa composée. D'autre part le choix de  $z$  et les relations de définition de  $\mathcal{G}_n$  montrent que  $(x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{\omega} z)$  et  $(z \xrightarrow{\omega} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3)$  s'identifient à des générateurs de  $\mathcal{G}_n$ .

Démontrons maintenant que, si  $f \in Aut(x)$  est la composée  $h \circ g$  où  $g = x \xrightarrow{a} y$  et  $h = y \xrightarrow{b} x$ , alors  $\varphi(f) \in F^\times$  est le birapport  $r(x, y; a, b)$  des quatre points  $x, y, a, b$ . On a  $\varphi(f) = \varphi(h) \circ \varphi(g)$ ; soit  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{a}, \vec{b}$



au-dessus de  $x, y, a, b$  tels que  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$  et  $\vec{b} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$ , alors  $\varphi(f)(\vec{x}) = \varphi(h)(-\vec{y}) = \lambda\vec{x}$ , donc  $\varphi(f)$  est la multiplication par  $\lambda$ . D'autre part  $\lambda = r(x, y; a, b)$ ; en effet si on envoie  $x$  à l'infini et si on prend  $y$  pour origine de la droite affine ainsi obtenue, les coordonnées de  $a$  et  $b$  sont respectivement 1 et  $\lambda$ , mais  $r(\infty, 0; 1, \lambda) = \lambda$ .

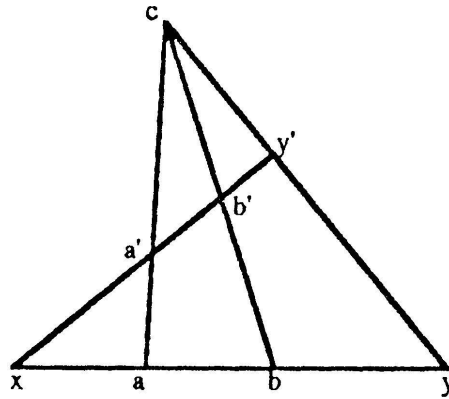


FIGURE 6

Pour achever la preuve, montrons que  $\varphi: \text{Aut}(x) \rightarrow \text{Aut}(\varphi(x))$  est injective. Notons  $(x, y; a, b)$  l'automorphisme de  $x: (y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$ , et prouvons que si  $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$ , alors  $(x, y; a, b) = (x, y'; a', b')$ . On peut supposer que  $a \neq b$  et  $a' \neq b'$ . Si  $x, y, y'$  ne sont pas alignés, par l'invariance projective du birapport l'égalité  $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$  entraîne que les droites  $\langle y, y' \rangle$ ,  $\langle a, a' \rangle$  et  $\langle b, b' \rangle$  sont concourantes. Mais alors en utilisant les relations de définition de  $\mathcal{E}_n$ , on a successivement

$$(y' \xrightarrow{a'} x) \circ (x \xrightarrow{b'} y') \circ (y \xrightarrow{b} x) = (y' \xrightarrow{a'} x) \circ (y \xrightarrow{c} y') = (y \xrightarrow{a} x),$$

ce qui montre que  $(x, y'; a', b')^{-1} \circ (x, y; a, b) = id_x$ . Si enfin,  $x, y, y'$  sont alignés, on applique deux fois ce qui précède en considérant  $y''$  en dehors de la droite  $\langle x, y \rangle$  et  $a'', b''$  sur la droite  $\langle x, y'' \rangle$  tels que  $r(x, y; a, b) = r(x, y''; a'', b'')$ .  $\square$

## 2. GROUPOÏDES ET GRASSMANNIENNES

### 2.1 PRÉSENTATION PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

On se propose de généraliser ce qui précède aux groupoïdes  $\mathcal{V}_{n,l}$  de la définition 1 et aux grassmanniennes.

**DÉFINITION 3.** Pour  $n \geq 3l - 1$ , on note  $\mathcal{V}'_{n,l}$  le groupoïde décrit par générateurs et relations comme suit.