**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 41 (1995)

**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** BIRAPPORT ET GROUPOÏDES

**Autor:** Cathelineau, Jean-Louis

**Kapitel:** 3.2 Homologie du groupe linéaire et grassmanniennes infinies

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-61827

$= (\lambda v_0, \ldots, \lambda v_n)$. Pour l'acyclicité, on remarque que si $d(\sum_i (v_0^i, \ldots, v_n^i)) = 0$, on peut choisir un vecteur $v$ de $F^{(\mathrm{N})}$ indépendant de tous les $v_j^i$ et alors on vérifie que $\sum_i (v_0^i, \ldots, v_n^i) = d(\sum_i (v, v_0^i, \ldots, v_n^i))$. Pour terminer la preuve, il suffit d'observer que le complexe des coinvariants de (2), sous l'action de $\mathbf{Z}[F^\times]$, s'identifie au complexe (1); cela résulte du fait que les orbites de $\mathscr{C}_n$ sous l'action de $F^\times$ sont en bijection naturelle avec les éléments de $\mathscr{R}_n$; en effet à l'orbite de l'élément $(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathscr{C}_n$ est associé le $n$-repère projectif image de $(v_0, v_1, \ldots, v_n, \sum v_i)$ par $p$; inversement soit un repère projectif $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \omega)$ et soit $D_i$ la droite au-dessus de $x_i$ et $\Delta$ celle au-dessus de $\omega$, ce repère provient de l'orbite de $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, où les $v_i$ sont les éléments de la décomposition d'un vecteur de la droite $\Delta$ dans la somme directe des $D_i$. $\square$

Le groupe projectif $GP(F^{(\mathrm{N})})$ opère dans le complexe (1) par

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n, \omega) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(\omega)) .$$

L'action induite en homologie est triviale. Cela résulte d'un argument standard d'algèbre homologique (voir par exemple [2]); en effet cette action provient, par passage aux coinvariants, d'une action de $GL(F^{(\mathrm{N})})$ dans la résolution (2), action qui est triviale sur $\mathbf{Z}$ et coïncide avec l'action diagonale sur les éléments de $\mathscr{C}_n$; noter que cette action commute avec celle de $\mathbf{Z}[F^\times]$.

### 3.2 Homologie du groupe linéaire et grassmanniennes infinies

On va esquisser une description géométrique analogue pour l'homologie du groupe linéaire $GL(l, F)$ en utilisant les considérations du paragraphe 2. Relativement à la grassmannienne $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ des sous-espaces de dimension $l-1$ de $\mathbf{P}^\infty(F)$, on peut définir des groupoïdes $\mathscr{G}_{\infty, l}$ et $\mathscr{G}'_{\infty, l}$ analogues à $\mathscr{G}_\infty$ et $\mathscr{G}'_\infty$. Pour $n > 0$, $\mathscr{R}_n^l$ désigne l'ensemble des $(n+2)$-uplets $(X_0, X_1, \ldots, X_n, Y)$ d'éléments de $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ tels que $n+1$ d'entre eux soient en position générale dans $\mathbf{P}^\infty(F)$ et $Y$ est contenu dans le sous-espace $\langle X_0, X_1, \ldots, X_n \rangle$: ces $(n+2)$-uplets jouent le rôle des repères projectifs; on pose de plus $\mathscr{R}_0^l = \mathbf{G}^{\infty, l}(F)$. On est conduit naturellement à la construction d'un complexe géométrique

$$(3) \qquad \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{R}_n^l] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{R}_{n-1}^l] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{R}_0^l] \to 0 ,$$

dont les groupes d'homologie coïncident avec ceux de $GL(l, F)$. Dans (3), $\mathbf{Z}[\mathscr{R}_n^l]$ est le $\mathbf{Z}$-module libre de générateurs les éléments de $\mathscr{R}_n^l$, et $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$, où

$$\partial_i(X_0, \ldots, X_n, Y) = (X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n, Y_i) ,$$

avec $Y_i = \langle X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n \rangle \cap \langle Y, X_i \rangle$. Le théorème 4 se généralise alors sous la forme suivante.

THÉORÈME 5. *L'homologie $H_*(GL(l, F), \mathbf{Z})$ du groupe linéaire $GL(l, F)$ est isomorphe à celle du complexe (3).*

*Preuve.* Il suffit encore de remarquer que le complexe (3) s'identifie au complexe des coinvariants d'une résolution de $\mathbf{Z}$ par des $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$-modules libres.

Pour cela, on introduit l'ensemble $\mathscr{C}^l_n$ des

$$(\overbrace{(v^1_0, \ldots, v^l_0)}^{V_0}, \overbrace{(v^1_1, \ldots, v^l_1)}^{V_1}, \ldots, \overbrace{(v^1_n, \ldots, v^l_n)}^{V_n}),$$

où $\{v^j_i\}_{i,j}$ est une famille libre de $F^{(\mathrm{N})}$. Le $\mathbf{Z}$-module libre $\mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_n]$ est aussi un $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$-module libre pour l'action définie comme suit: si $g = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant l}$ et $V = (v_1, \ldots, v_l)$, on pose $g \,.\, V = (\sum_j a_{1j} v_j, \ldots, \sum_j a_{lj} v_j)$ et $g \,.\, (V_0, \ldots, V_n) = (g \,.\, V_0, \ldots, g \,.\, V_n)$. On a alors une $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$-résolution acyclique de $\mathbf{Z}$

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_n] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_{n-1}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_0] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z},$$

en posant $d(V_0, \ldots, V_n) = \sum^n_{i=0} (-1)^i (V_0, \ldots, \hat{V}_i, \ldots, V_n)$. Indiquons comment $\mathscr{R}^l_n$ paramétrise les orbites de $GL(l, F)$ dans $\mathscr{C}^l_n$. A l'orbite de l'élément $(V_0, \ldots, V_n) \in \mathscr{C}^l_n$ correspond l'élément $(X_0, X_1, \ldots, X_n, Y) \in \mathscr{R}^l_n$ défini comme suit: $X_i$ est associé au sous-espace de $F^{(\mathrm{N})}$ engendré par $\{v^1_i, \ldots, v^l_i\}$ et $Y$ à celui engendré par $\{\sum^n_{i=0} v^1_i, \ldots, \sum^n_{i=0} v^l_i\}$. □

Comme au paragraphe précédent, l'action naturelle du groupe projectif $GP(F^{(\mathrm{N})})$ dans le complexe (3) induit l'action triviale en homologie.

A.A. Suslin [16] a prouvé le résultat de stabilité suivant

THÉORÈME 6. *Si $F$ est un corps infini, le morphisme naturel en homologie*

$$H_n(GL(l, F), \mathbf{Z}) \to H_n(GL(l+1, F), \mathbf{Z}),$$

*est un isomorphisme pour $l \geqslant n$.*

Il serait intéressant de retrouver ce résultat de façon géométrique à l'aide de ce qui précède.