

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** BIRAPPORT ET GROUPOÏDES  
**Autor:** Cathelineau, Jean-Louis  
**Kapitel:** 3.2 Homologie du groupe linéaire et grassmanniennes infinies  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$= (\lambda v_0, \dots, \lambda v_n)$ . Pour l'acyclicité, on remarque que si  $d(\sum_i (v_0^i, \dots, v_n^i)) = 0$ , on peut choisir un vecteur  $v$  de  $F^{(N)}$  indépendant de tous les  $v_j^i$  et alors on vérifie que  $\sum_i (v_0^i, \dots, v_n^i) = d(\sum_i (v, v_0^i, \dots, v_n^i))$ . Pour terminer la preuve, il suffit d'observer que le complexe des coinvariants de (2), sous l'action de  $\mathbf{Z}[F^\times]$ , s'identifie au complexe (1); cela résulte du fait que les orbites de  $\mathcal{C}_n$  sous l'action de  $F^\times$  sont en bijection naturelle avec les éléments de  $\mathcal{R}_n$ ; en effet à l'orbite de l'élément  $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{C}_n$  est associé le  $n$ -repère projectif image de  $(v_0, v_1, \dots, v_n, \sum v_i)$  par  $p$ ; inversement soit un repère projectif  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$  et soit  $D_i$  la droite au-dessus de  $x_i$  et  $\Delta$  celle au-dessus de  $\omega$ , ce repère provient de l'orbite de  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ , où les  $v_i$  sont les éléments de la décomposition d'un vecteur de la droite  $\Delta$  dans la somme directe des  $D_i$ .  $\square$

Le groupe projectif  $GP(F^{(N)})$  opère dans le complexe (1) par

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f(\omega)).$$

L'action induite en homologie est triviale. Cela résulte d'un argument standard d'algèbre homologique (voir par exemple [2]); en effet cette action provient, par passage aux coinvariants, d'une action de  $GL(F^{(N)})$  dans la résolution (2), action qui est triviale sur  $\mathbf{Z}$  et coïncide avec l'action diagonale sur les éléments de  $\mathcal{C}_n$ ; noter que cette action commute avec celle de  $\mathbf{Z}[F^\times]$ .

### 3.2 HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET GRASSMANNIENNES INFINIES

On va esquisser une description géométrique analogue pour l'homologie du groupe linéaire  $GL(l, F)$  en utilisant les considérations du paragraphe 2. Relativement à la grassmannienne  $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$  des sous-espaces de dimension  $l - 1$  de  $\mathbf{P}^\infty(F)$ , on peut définir des groupoïdes  $\mathcal{G}_{\infty, l}$  et  $\mathcal{G}'_{\infty, l}$  analogues à  $\mathcal{G}_\infty$  et  $\mathcal{G}'_\infty$ . Pour  $n > 0$ ,  $\mathcal{R}_n^l$  désigne l'ensemble des  $(n + 2)$ -uplets  $(X_0, X_1, \dots, X_n, Y)$  d'éléments de  $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$  tels que  $n + 1$  d'entre eux soient en position générale dans  $\mathbf{P}^\infty(F)$  et  $Y$  est contenu dans le sous-espace  $\langle X_0, X_1, \dots, X_n \rangle$ : ces  $(n + 2)$ -uplets jouent le rôle des repères projectifs; on pose de plus  $\mathcal{R}_0^l = \mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ . On est conduit naturellement à la construction d'un complexe géométrique

$$(3) \quad \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_n^l] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_{n-1}^l] \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_0^l] \rightarrow 0,$$

dont les groupes d'homologie coïncident avec ceux de  $GL(l, F)$ . Dans (3),  $\mathbf{Z}[\mathcal{R}_n^l]$  est le  $\mathbf{Z}$ -module libre de générateurs les éléments de  $\mathcal{R}_n^l$ , et  $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ , où

$$\partial_i(X_0, \dots, X_n, Y) = (X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n, Y_i),$$

avec  $Y_i = \langle X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n \rangle \cap \langle Y, X_i \rangle$ . Le théorème 4 se généralise alors sous la forme suivante.

**THÉORÈME 5.** *L'homologie  $H_*(GL(l, F), \mathbf{Z})$  du groupe linéaire  $GL(l, F)$  est isomorphe à celle du complexe (3).*

*Preuve.* Il suffit encore de remarquer que le complexe (3) s'identifie au complexe des coinvariants d'une résolution de  $\mathbf{Z}$  par des  $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$ -modules libres.

Pour cela, on introduit l'ensemble  $\mathcal{C}_n^l$  des

$$\left( \overbrace{(v_0^1, \dots, v_0^l)}^{V_0}, \overbrace{(v_1^1, \dots, v_1^l)}^{V_1}, \dots, \overbrace{(v_n^1, \dots, v_n^l)}^{V_n} \right),$$

où  $\{v_i^j\}_{i,j}$  est une famille libre de  $F^{(N)}$ . Le  $\mathbf{Z}$ -module libre  $\mathbf{Z}[\mathcal{C}_n^l]$  est aussi un  $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$ -module libre pour l'action définie comme suit: si  $g = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$  et  $V = (v_1, \dots, v_l)$ , on pose  $g \cdot V = (\sum_j a_{1j} v_j, \dots, \sum_j a_{lj} v_j)$  et  $g \cdot (V_0, \dots, V_n) = (g \cdot V_0, \dots, g \cdot V_n)$ . On a alors une  $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$ -résolution acyclique de  $\mathbf{Z}$

$$\dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_n^l] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_{n-1}^l] \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_0^l] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z},$$

en posant  $d(V_0, \dots, V_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n)$ . Indiquons comment  $\mathcal{R}_n^l$  paramétrise les orbites de  $GL(l, F)$  dans  $\mathcal{C}_n^l$ . A l'orbite de l'élément  $(V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{C}_n^l$  correspond l'élément  $(X_0, X_1, \dots, X_n, Y) \in \mathcal{R}_n^l$  défini comme suit:  $X_i$  est associé au sous-espace de  $F^{(N)}$  engendré par  $\{v_i^1, \dots, v_i^l\}$  et  $Y$  à celui engendré par  $\{\sum_{i=0}^n v_i^1, \dots, \sum_{i=0}^n v_i^l\}$ .  $\square$

Comme au paragraphe précédent, l'action naturelle du groupe projectif  $GP(F^{(N)})$  dans le complexe (3) induit l'action triviale en homologie.

A.A. Suslin [16] a prouvé le résultat de stabilité suivant

**THÉORÈME 6.** *Si  $F$  est un corps infini, le morphisme naturel en homologie*

$$H_n(GL(l, F), \mathbf{Z}) \rightarrow H_n(GL(l + 1, F), \mathbf{Z}),$$

*est un isomorphisme pour  $l \geq n$ .*

Il serait intéressant de retrouver ce résultat de façon géométrique à l'aide de ce qui précède.