

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BIRAPPORT ET GROUPOÏDES
Autor: Cathelineau, Jean-Louis
Kapitel: 4.2 Remarques sur un invariant de Goncharov
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61827>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

est invariante sous l'action diagonale de $GL(V)$ dans $V^n \times (V^*)^n$ (il est bien connu [14] que ces fonctions jouent un rôle en théorie des invariants). Par suite, si $(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sont comme précédemment et si $\sigma, \mu \in S_n$, on obtient un invariant projectif $J_{\sigma, \mu}$ à valeurs dans F^\times en posant

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{I_\sigma(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}{I_\mu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}$$

Soit alors

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) (j_1, j_2, \dots, j_l) \cdots (t_1, t_2, \dots, t_s)$$

la décomposition en cycles de la permutation $\sigma^{-1}\mu$, on vérifie facilement la relation

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = [x_{\sigma(i_1)}, \dots, x_{\sigma(i_k)}; \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}] \cdot [x_{\sigma(j_1)}, \dots, x_{\sigma(j_l)}; \varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_l}] \cdots [x_{\sigma(t_1)}, \dots, x_{\sigma(t_s)}; \varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_s}] .$$

4.2 REMARQUES SUR UN INVARIANT DE GONCHAROV

Considérons $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 2n$ points en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ et posons

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = [x_1, \dots, x_n; H_1, \dots, H_n] ,$$

où H_i est l'hyperplan $\langle y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n \rangle$; on obtient un invariant projectif qui vérifie en particulier

$$[[x_1, x_2; y_1, y_2]] = (r(x_1, x_2; y_1, y_2))^{-1} .$$

Soit «dét» le déterminant dans une base arbitraire de F^{n+1} , d'après la définition du n -rapport, on peut écrire

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{\prod_{i=1}^n \text{dét}(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_i)}{\prod_{i=1}^n \text{dét}(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{\tau(i)})} ,$$

où τ est la permutation cyclique $(12 \dots n)$; en particulier si on prend comme coordonnées homogènes de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 , \end{matrix}$$

on a l'expression

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{12} a_{23} \cdots a_{n1}} .$$

Soit $\mathbf{Z}[F^\times]$ l'algèbre du groupe multiplicatif de F . On définit un invariant projectif de $2n$ points x_1, \dots, x_{2n} en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ en posant dans $\mathbf{Z}[F^\times]$

$$\tilde{r}_n(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon_\sigma [[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2n)}]] .$$

Pour $n = 3$ on retrouve l'invariant de 6 points du plan projectif $\mathbf{P}^2(F)$ considéré par Goncharov dans son travail sur la conjecture de Zagier [8].

La proposition 4 montre que, pour $n = 3$, $[[x_1, \dots, x_6]]$ s'interprète dans le groupoïde \mathcal{G}_2 comme la composée $f_3 \circ f_2 \circ f_1$, où $f_1 = x_1 \xrightarrow{a_1} x_2$, $f_2 = x_2 \xrightarrow{a_2} x_3$, $f_3 = x_3 \xrightarrow{a_3} x_1$ et les points a_i sont comme sur la figure 11.

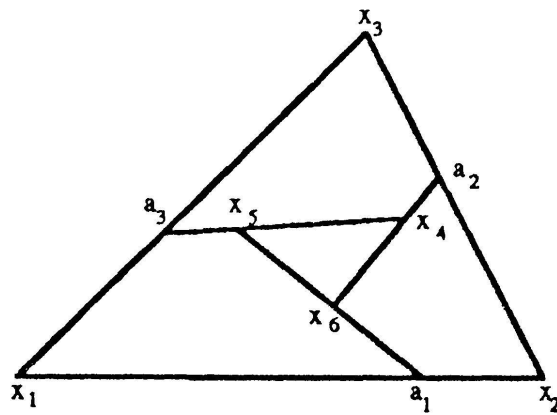


FIGURE 11

On aurait pu aussi procéder en s'inspirant de la figure 12, c'est-à-dire poser

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]]' = [x_1, \dots, x_n; L_1, \dots, L_n] ,$$

où L_i est l'hyperplan $\langle y_i, x_1, \dots, \widehat{x_i}, \widehat{x_{i+1}}, \dots, x_n \rangle$, où $x_{n+1} \equiv x_1$ et définir l'invariant projectif de $2n$ points

$$\tilde{r}'_n(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon_\sigma [[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2n)}]]' .$$

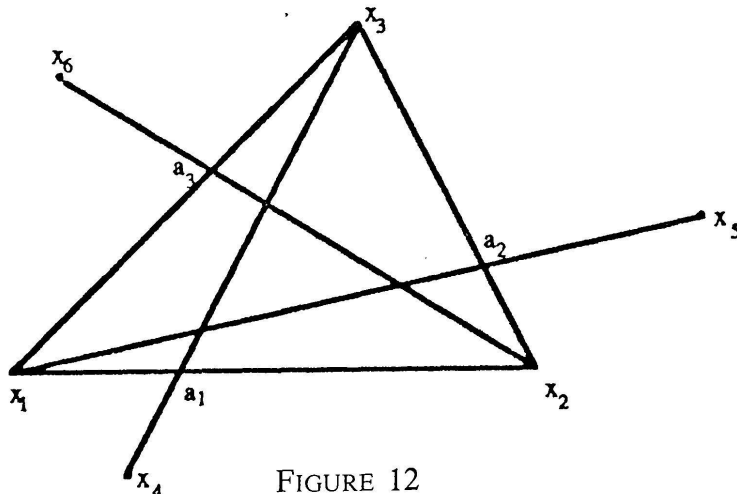


FIGURE 12

Ces deux invariants sont essentiellement les mêmes.

PROPOSITION 5. *Considérons l'involution de $\mathbf{Z}[F^\times]$ donnée par*

$$\lambda_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + n - 1} \mu_n$$

où μ_n est l'involution de $\mathbf{Z}[F^\times]$ provenant de la multiplication par $(-1)^n$ dans F^\times , on a

$$\tilde{r}'_n = \lambda_n \circ \tilde{r}_n .$$

Preuve. Pour simplifier on posera

$$|j_1, \dots, j_n| := \det(\vec{x}_{j_1}, \dots, \vec{x}_{j_n}) .$$

On a la relation

$$\begin{aligned} & \frac{|n+1, 3, \dots, n, 1| \dots |n+i, 1, \dots, \widehat{i, i+1}, \dots, n, i| \dots |2n, 2, \dots, n-1, n|}{|n+1, 3, \dots, n, 2| \dots |n+i, 1, \dots, \widehat{i, i+1}, \dots, n, i+1| \dots |2n, 2, \dots, n-1, 1|} \\ &= (-1)^n \frac{|1, 3, \dots, n, n+1| \dots |1, \dots, \widehat{i+1}, \dots, n, n+i| \dots |2, \dots, n, 2n|}{|2, 3, \dots, n, n+1| \dots |1, \dots, \widehat{i}, \dots, n, n+i| \dots |1, 2, \dots, n-1, 2n|} \\ &= (-1)^n \frac{|2, 3, \dots, n, 2n| \dots |1, \dots, \widehat{i+1}, \dots, n, n+i| \dots |1, \dots, n-1, 2n-1|}{|2, 3, \dots, n, n+1| \dots |1, \dots, \widehat{i+1}, \dots, n, n+i+1| \dots |1, \dots, n-1, 2n|} . \end{aligned}$$

Par suite,

$$[[x_1, \dots, x_{2n}]]' = (-1)^n [[x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(2n)}]] ,$$

où τ est la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ 2n & n+1 & \dots & 2n-1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} .$$

La signature de τ est égale à $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + n - 1}$, d'où la proposition. \square

On voit que si $\omega: \mathbf{Z}[F^\times] \rightarrow F$ est le morphisme de \mathbf{Z} -modules déduit de l'injection de F^\times dans F , alors $\omega \circ \tilde{r}_n = 0$ pour $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$; l'analogue classique de l'invariant de Goncharov \tilde{r}_3 est donc trivial.

Dans la preuve de la conjecture de Zagier, pour $n = 2$ et 3 , l'invariant \tilde{r}_n est couplé au n -logarithme (voir [9, 8, 4]); l'analogue pour $n > 3$ est une question intéressante qui reste mystérieuse.

Après soumission de cet article, j'ai appris l'existence de deux preprints qui considèrent aussi la catégorie des points de l'espace projectif. Elle semble avoir

été introduite par Koch [11] dans une courte note ancienne et non publiée; Diers et Leroy [5] l'utilisent pour retrouver des résultats classiques de géométrie. Les résultats qui précèdent sont indépendants de ces articles.

RÉFÉRENCES

- [1] BERGER, M. *Géométrie*, 5 volumes, Editions Cedic, 1977-78.
- [2] BROWN, K.S. *Cohomology of groups*. Grad. Texts in Math., Springer-Verlag 1982.
- [3] BROWN, R. From groups to groupoids: a brief survey. *Bull. London Math. Soc.* 19 (1987), 113-134.
- [4] CATHELINÉAU, J.L. Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes. *Sém. Bourbaki 1992/93 exp. 772. Astérisque 216* (1993), 311-341.
- [5] DIERS, Y. et J. LEROY. Catégorie des points d'un espace projectif. *Cahiers de Géométrie Différentielle* 35 (1994), 2-29.
- [6] FULTON, W. *Intersection Theory*. Springer Verlag, 1984.
- [7] JARDINE, J.F. Geometric Models for the K -Theory of Fields. *J. of Algebra* 84 (1983), 220-239.
- [8] GONCHAROV, A.B. Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology. *Adv. in Math.* 114 (1995), 197-318.
- [9] ——— Polylogarithms and motivic Galois groups. Proc. of the Seattle conf. on motives, Seattle July 1991. *A.M.S. Proc. Symp. in Pure Math.* 55 (1994) 2, 43-96.
- [10] GREENBERG, P. Triangulating groups, two examples. Preprint, Grenoble 1992.
- [11] GRIFFITH, Ph. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley and Sons, 1978.
- [12] HUSEMOLLER, D. *Fibre Bundles*. Grad. Texts in Math., Springer Verlag, 1975.
- [13] KOCK, A. The category aspect of projective space. Aarhus Universitet, preprint 1974.
- [14] PROCESI, C. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Adv. in Math.* 19 (1976), 306-381.
- [15] SEGAL, G. Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. I.H.E.S.* 34 (1968), 105-112.
- [16] SUSLIN, A.A. *Homology of GL_n , characteristic classes and Milnor K -theory*. Springer Lect. Notes in Math. 1046 (1989), 357-375.

(Reçu le 12 octobre 1994)

Jean-Louis Cathelineau

Laboratoire Jean Dieudonné
 URA CNRS 168
 Parc Valrose
 F-06108 Nice Cedex 2
 France