

# 5. Chern-Simons invariants and the regulator map

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 5. CHERN-SIMONS INVARIANTS AND THE REGULATOR MAP

As we have seen from the above discussion, hyperbolic 3-manifolds and their volumes all have interesting  $K$ -theoretic interpretation. Another important invariant in the theory of hyperbolic 3-manifolds is the Chern-Simons invariant of [4] and [9]. What is its relation with  $K$ -theory? As discussed in sect. 1, any hyperbolic 3-manifold  $M$  represents a class  $\beta(M)$  in  $\mathcal{B}(\mathbf{C})$ . For  $M$  compact, the next theorem follows from Theorem 1.11 of Dupont [5]. A proof for cusped  $M$  can be found in [14].

**THEOREM 5.1.** *The Chern-Simons invariant of  $M \bmod \mathbf{Q}(2)$  is equal to the real part of the image of  $\beta(M)$  under the regulator map*

$$\rho: \mathcal{B}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Q}(2). \quad \square$$

Now given a hyperbolic 3-manifold  $M$  with invariant trace field  $k$  and the associated embedding  $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}$ , the class  $\beta(M) \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$  associated to  $M$  is in the image of  $\mathcal{B}(k)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{B}(\mathbf{C})$  (Theorem 1.1). If  $\sigma$  is a  $CM$ -embedding, then it follows from Corollary 3.2 that the real part of  $\rho$  is trivial on  $\mathcal{B}(F) \otimes \mathbf{Q}$ . Theorem A in the introduction now follows immediately from Theorem 5.1. Similarly, as in the previous section, Corollary 3.2 implies that the irrationality conjecture for Chern Simons invariant of the Introduction would be implied by the Ramakrishnan Conjecture.

We have seen that the imaginary part of  $\rho$  is essentially the volume map while the real part of  $\rho$  can be called the Chern-Simons map. Reinterpreting the discussion of the previous section, this means that if  $k = \bar{k} \subset \mathbf{C}$ , then the volume map on  $\mathcal{B}(k)$  factors through  $\mathcal{B}_-(k)$  and Chern-Simons map on  $\mathcal{B}(K)$  factors over  $\mathcal{B}_+(k)$ . By Theorem B we thus get bounds of  $\frac{1}{2}(r_2 + r'_2)$  and  $\frac{1}{2}(r_2 - r'_2)$  on the number of rationally independent volumes resp. Chern-Simons invariants for manifolds having invariant trace field contained in our given  $k$ . Ramakrishnan's Conjecture says the image of  $\rho$  has  $\mathbf{Q}$ -rank  $r_2$ . This is equivalent to the conjecture that the  $\mathbf{Q}$ -ranks of the images of  $\text{vol}: \mathcal{B}(k) \rightarrow \mathbf{R}$  and  $\text{CS}: \mathcal{B}(k) \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Q}$  are exactly  $\frac{1}{2}(r_2 + r'_2)$  and  $\frac{1}{2}(r_2 - r'_2)$ .