Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Quasi-convexe: Supposons X géodésique. Un sous-ensemble Z de X est C-quasi-convexe, si deux points quelconques de Z peuvent être reliés par un segment géodésique contenu dans le C-voisinage de Z dans X. Il est quasi-convexe, s'il est C-quasi-convexe pour un certain réel C.

1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

Désormais, (X, d_X) est un espace métrique géodésique.

1.2.1. Définition

a) Le triangle $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X est δ-fin si pour tout u appartenant à $[xy]$, on a:

$$d_X(u, [yz] \cup [zx]) \leqslant \delta .$$

b) X est δ-hyperbolique si tout triangle de X est δ-fin. Il est hyperbolique, s'il est δ-hyperbolique pour un certain réel δ.

Observons qu'un espace δ-hyperbolique a la propriété suivante: deux segments géodésiques de mêmes extrémités, sont à distance de Hausdorff inférieure à δ. Autrement dit, chacun est contenu dans le δ-voisinage de l'autre.

1.2.2. Exemples (voir [C-D-P], chapitre 1, §4 et 5).

a) Un arbre métrique est 0-hyperbolique.

b) L'espace hyperbolique réel n-dimensionnel $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est log 3-hyperbolique.

c) D'après le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov, toute variété riemannienne simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

Une première propriété fondamentale des espaces hyperboliques est:

1.2.3. Théorème (Propriété des quasi-segments géodésiques).

Il existe une constante C ne dépendant que de λ, k, δ, avec la propriété suivante: tout (λ, k)-quasi-segment géodésique d'un espace δ-hyperbolique, est à distance de Hausdorff inférieure à C, de n'importe quel segment géodésique joignant ses extrémités.

Dont on déduit immédiatement:

1.2.4. Corollaire (Invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie).

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces géodésiques.

a) *Si* Y *est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de* X *dans* Y, *alors* X *est hyperbolique.*

b) *Si* X *et* Y *sont quasi-isométriques, alors* X *est hyperbolique si et seulement si* Y *l'est.*

1.2.5. COROLLAIRE (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). *Soient* (X, d_X) (Y, d_Y) *deux espaces géodésiques et* f *une quasi-isométrie de* X *dans* Y. *Si* Y *est hyperbolique, l'image par* f *de tout quasi-convexe de* X *est un quasi-convexe de* Y.

1.3. CAT$(-b^2)$-ESPACES

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit (X, d_X) un espace métrique géodésique, et soit $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante $-b^2$.

A tout triangle $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X associons un triangle $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$ de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ dont les côtés ont même longueur que ceux de Δ. Le triangle $\bar{\Delta}$ est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à Δ. Soit:

$$\Delta \to \bar{\Delta}$$
$$s \mapsto \bar{s}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de Δ est une isométrie.

1.3.1. DÉFINITION

a) On dit que Δ satisfait CAT$(-b^2)$ (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient s, t appartenant à Δ:

$$d_X(s, t) \leqslant d_{\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}) .$$

b) X est un CAT$(-b^2)$-espace si tout triangle de X satisfait CAT$(-b^2)$.

Les CAT$(-b^2)$-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure $\leqslant -b^2$. En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition:

a) Deux points de X déterminent un unique segment géodésique.

b) X est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

c) X est contractible.