1.8. Groupes quasi-convexes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

d) Ou bien il est fini, ou bien il est une extension finie de $\mathbf{Z}$, ou bien il contient un groupe libre de rang au moins deux. Dans les deux premiers cas il est dit élémentaire. S'il est non élémentaire, il est à croissance exponentielle ([G-H], chapitre 8, théorème 37).

e) Il est automatique (voir [C-D-P], [C-E-H-P-T]).

1.8. Groupes quasi-convexes

1.8.1. Définition. Soit X un espace métrique géodésique propre, et x un élément de X. Un sous-groupe d'isométries de X est quasi-convexe, s'il est proprement discontinu, et si l'orbite de x est un quasi-convexe de X.

On vérifie que la définition est indépendante du point x choisi. Notons qu'un sous-groupe d'isométries proprement discontinu cocompact, est quasi-convexe. La propreté de X permet de montrer:

1.8.2. Proposition. *Un groupe quasi-convexe* Γ *d'isométries de* X, *est de type fini. De plus, si* S *est un système symétrique de générateurs de* Γ, *l'application:*

$$\begin{aligned}(\Gamma, |\ |_S) &\to X\\ g &\mapsto gx\end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

Pour montrer cette proposition, il suffit d'exhiber un système de générateurs S adéquat. Si l'orbite de x est C-quasi-convexe, on vérifie que l'ensemble:

$$S = \{a_i \in \Gamma - \{e\} \mid |x - a_i x|_X \leqslant 2C + 1\}$$

convient.

Supposons maintenant X hyperbolique. Alors, par l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie:

1.8.3. Corollaire. *Tout groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, est hyperbolique.*

Par l'invariance des quasi-convexes par quasi-isométries, on obtient la caractérisation suivante des groupes quasi-convexes:

1.8.4. Corollaire. *Soit* Γ *un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) Γ *est quasi-convexe.*

b) Γ *est de type fini, et quels que soient le système symétrique de générateurs* S *de* Γ, *et l'élément* x *de* X, *l'application*

$$\begin{aligned}(\Gamma, |\,|_S) &\to X \\ g &\mapsto gx\end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

Rappelons que l'ensemble limite Λ d'un sous-groupe d'isométries Γ de X est défini de la manière suivante:

Soit $x \in X$, considérons $\overline{\Gamma\{x\}}$ l'adhérence de l'orbite de x dans le compact $X \cup \partial X$. Alors:

$$\Lambda = \overline{\Gamma\{x\}} \cap \partial X .$$

Il est compact et indépendant du point x choisi.

Si maintenant Γ est quasi-convexe, alors d'après le théorème 1.6.4, la quasi-isométrie:

$$\begin{aligned}\Gamma &\to X \\ g &\mapsto gx\end{aligned}$$

s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de $\partial\Gamma$ dans ∂X. Clairement il est indépendant du point x choisi, et son image est Λ. Dès lors:

1.8.5. COROLLAIRE. *Le bord d'un groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, et son ensemble limite, se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme, bi-Hölder, canonique.*

Nous donnons une dernière caractérisation des groupes quasi-convexes d'isométries d'un espace hyperbolique X. Celle-ci permet de faire le lien avec les groupes convexes cocompacts de Thurston. Soit E un sous-ensemble de ∂X. Son enveloppe de Gromov, notée $Q(E)$, est l'ensemble des (images des) géodésiques dont les deux extrémités appartiennent à E. C'est un quasi-convexe de X. Si Γ est un sous-groupe d'isométries de X, l'enveloppe de Gromov de son ensemble limite est Γ-invariante; et on a (voir [C]):

1.8.6. PROPOSITION. Γ *est quasi-convexe si et seulement si il est proprement discontinu et si* $Q(\Lambda)/\Gamma$ *est compact.*

1.8.7. EXEMPLES. Soit Γ un sous-groupe d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. Rappelons que Γ est convexe cocompact, s'il est proprement discontinu, et s'il agit de manière cocompacte sur l'enveloppe convexe $H(\Lambda)$ de son ensemble limite. Il est quasi-convexe si et seulement si il est convexe cocompact. En effet, $Q(\Lambda)$ et $H(\Lambda)$ sont à distance de Hausdorff finie. Une manière de le montrer est la suivante (voir [C]): Le convexe $H(\Lambda)$ est la réunion des n-simplexes idéaux de $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$, dont les arêtes sont des géodésiques de $Q(\Lambda)$ (c'est un théorème de Carathéodory appliqué au modèle de Klein de $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ (voir [Ber], théorème 11.1.8.6)). Or tout point d'un n-simplexe de $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ est à distance majorée par une constante universelle $C(n)$, de ses arêtes.

Signalons aussi que Γ est convexe cocompact si et seulement si il est géométriquement fini sans parabolique (une conséquence de la décomposition de Margulis en parties fines et épaisses).

Enfin, tout groupe fuchsien de type fini est géométriquement fini (voir [Bea], chapitre 10). Aussi, un groupe fuchsien est quasi-convexe si et seulement si il est de type fini sans parabolique.

2. Structure conforme sur le bord d'un CAT(-1)-espace Ensemble limite et flot géodésique associés à une action quasi-convexe

2.0. Introduction

Soit X un CAT(-1)-espace. Nous montrons que son bord admet une structure conforme canonique, compatible avec sa structure quasi-conforme. Plus précisément, nous construisons sur ∂X une famille de métriques visuelles $\{d_x, x \in X\}$, deux à deux conformes, qui ont la propriété que les isométries de X soient des applications conformes de $(\partial X, d_x)$.

Rappelons qu'une application $f:(A, d_A) \to (B, d_B)$ est conforme, si quel que soit $a_0 \in A$, la limite lorsque a tend vers a_0 de

$$\frac{d_B(f(a), f(a_0))}{d_A(a, a_0)}$$

existe et est finie non nulle. On l'appellera le facteur conforme de f en a_0. Rappelons également que deux métriques d_1, d_2 sur A, sont conformes, si l'identité $(A, d_1) \to (A, d_2)$ est conforme.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique Γ sur un CAT(-1)-espace X. A cette action sont associés:

— L'ensemble limite de Γ dans ∂X, muni de la structure conforme induite, sur lequel agit Γ par transformations conformes.