2.3. Horosphères

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

limite et du flot géodésique associés à une action isométrique, quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique sur X. On développe brièvement la notion de mesure conforme sur l'ensemble limite, et on rappelle une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Au paragraphe 2.11, nous montrons le théorème 2.0.1.

2.1. Fonctions de Busemann

Soit $r: [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique, et $x \in X$. D'après l'inégalité triangulaire, la fonction

$$t \mapsto |x - r(t)| - t$$

est décroissante et minorée par $-|x - r(0)|$. Appelons $b_r(x)$ sa limite en $+\infty$. L'application b_r de X dans $\mathbf{R}$ ainsi définie, est la fonction de Busemann associée au rayon r.

2.2. Distances horosphériques

Soit $x, y \in X$, $\xi \in \partial X$, et $r: [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. La quantité

$$\lim_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$$

est égale à $b_r(x) - b_r(y)$. Elle est indépendante du rayon r d'extrémité ξ. En effet si r' est un autre rayon d'extrémité ξ, par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, on a:

$$\lim_{t \to +\infty} d(r'(t), r) = 0 . \tag{2.2.0}$$

La limite $B_\xi(x, y) = \lim\limits_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$ est appelée distance horosphérique de x à y relativement à ξ. Elle vérifie:

$$B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x) \tag{2.2.1}$$

$$B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z) \tag{2.2.2}$$

$$B_\xi(x, y) \leqslant |x - y| \tag{2.2.3}$$

avec égalité si et seulement si $y \in [x\xi)$.

2.3. Horosphères

Considérons les ensembles de niveau de la fonction:

$$f_x: z \mapsto B_\xi(x, z) .$$

D'après 2.2.2, ils sont indépendants de x. Plus précisément, l'ensemble de niveau t de f_x est égal à l'ensemble de niveau $t - B_\xi(x, y)$ de f_y. Ce sont les horosphères en ξ.

La distance horosphérique s'exprime maintenant de la manière suivante: Soient $H_{x,\xi}$ et $H_{y,\xi}$ les horosphères en ξ, passant par x et y. On a d'après 2.2.3:

$$|B_\xi(x, y)| = d(x, H_{y,\xi}) = d(H_{x,\xi}, H_{y,\xi}) .$$

Signalons aussi une autre définition des horosphères, qui permet de les relier aux sous-espaces fortement stables et fortement instables du flot géodésique: Soit $\xi \in \partial X$. Pour $x \in X$, notons $r_x : [0, +\infty[\to X$ le rayon géodésique issu de x et d'extrémité ξ. Alors:

(2.3.1) $$H_{x,\xi} = \{y \in X \mid \lim_{t \to +\infty} |r_x(t) - r_y(t)| = 0\} .$$

Notons que les deux définitions coïncident, grâce à 2.2.0.

2.4. Produit de Gromov de deux éléments de ∂X

Soit x, y, z trois points de X. Rappelons que le produit de Gromov de y, z relativement à x, est défini par (voir figure 0):

$$(y \mid z)_x = \tfrac{1}{2}(|x - y| + |x - z| - |y - z|)$$

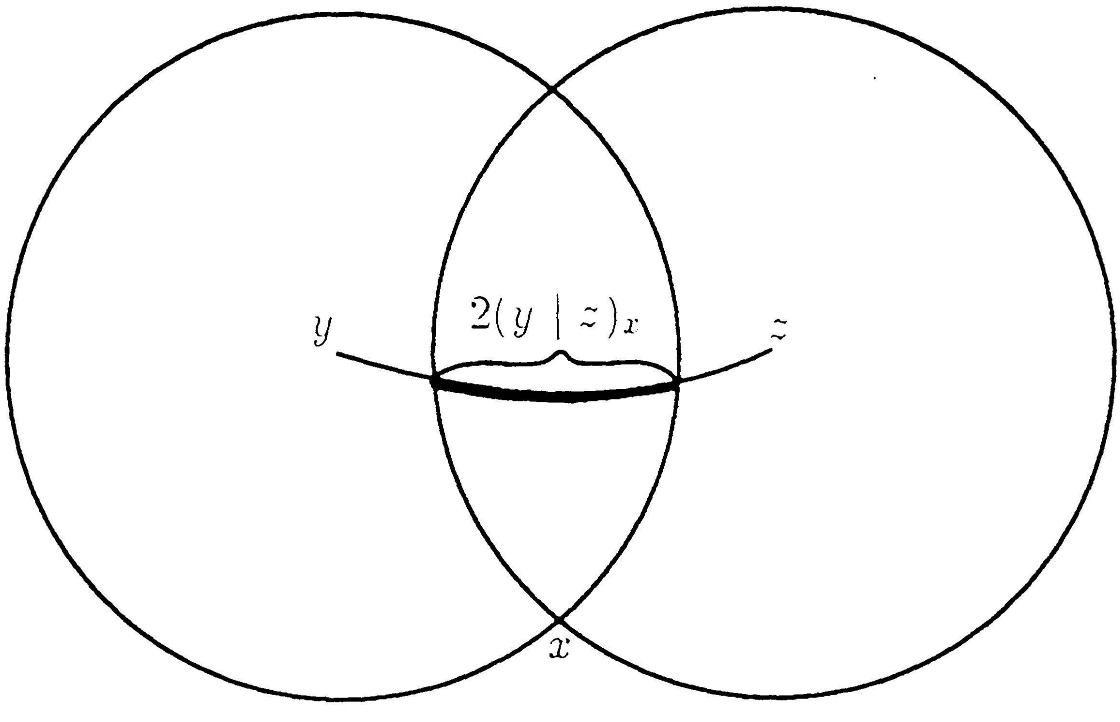

Figure 0