2.8. Flot géodésique associé à une action quasi-convexe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

2.7.5. THÉORÈME.

a) *La dimension* τ *est égale au taux de croissance de* Γ *dans* X. *C'est-à-dire:*

$$\tau = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\} .$$

b) *La* ν_x*-mesure d'une boule de* (Λ, d_x), *est proportionnelle à son rayon à la puissance* τ. *Autrement dit: il existe une constante* $C_x \geqslant 1$, *telle que pour toute boule* $B(\xi, r)$ *centrée sur* Λ, *on ait:*

$$C_x^{-1} r^\tau \leqslant \nu_x(B(\xi, r)) \leqslant C_x r^\tau .$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats: Soit $\alpha_0 = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\}$. S.J. Patterson a exhibé une mesure α_0-conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si $\{\mu_x, x \in X\}$ est une α-mesure conforme, alors la μ_x mesure d'une boule de Λ est proportionnelle à son rayon à la puissance α (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général, α (et en particulier α_0) est égal à τ, les mesures μ_x et ν_x sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque ν_x est finie, $\{\nu_x, x \in X\}$ est une τ-mesure conforme (voir 2.6.3). Deux τ-mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit X un CAT(-1)-espace, sur lequel agit Γ par isométrie de manière quasi-convexe. Notons Λ l'ensemble limite de Γ dans ∂X. Définissons $G\Lambda$ l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de X, dont les extrémités appartiennent à Λ:

$$G\Lambda = \{\gamma : \mathbf{R} \to X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\} .$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{G\Lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt .$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.

En effet, on a:

2.8.1. PROPOSITION. *Quel que soit* $T \geqslant 0$, *alors:*

$$e^{-T} \sup_{t \in [-T, T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \leqslant |\gamma - \gamma'|_{GA}$$
$$\leqslant \sup_{t \in [-T, T)} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X + 2e^{-T} .$$

2.8.2. *Preuve.* L'inégalité de droite est un simple calcul. L'inégalité de gauche provient de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe (voir 1.3):

$$t \mapsto |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X . \quad \square$$

Clairement, le groupe Γ agit par isométries sur $(G\Lambda, |\ |_{G\Lambda})$ de manière proprement discontinue. L'espace métrique quotient:

$$\mathscr{G} = G\Lambda/\Gamma$$

est l'espace du flot géodésique, associé à la paire (X, Γ). Notons que $\mathscr{G}$ est compact. En effet, Γ est quasi-convexe, donc le quotient de l'enveloppe de Gromov de Λ par Γ est compact (voir 1.8.6).

Le flot géodésique de $G\Lambda$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphisme $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$, provenant de l'action naturelle de $\mathbf{R}$ sur $G\Lambda$. Il est défini par:

$$\Phi_T(\gamma) = \gamma_T, \quad \text{avec} \quad \gamma_T(t) = \gamma(t + T) . \tag{2.8.3}$$

Remarquons que pour tout $T \in \mathbf{R}$, $g \in \Gamma$, et $\gamma \in G\Lambda$:

$$\Phi_T(g\gamma) = g\Phi_T(\gamma) . \tag{2.8.4}$$

Le flot géodésique de $\mathscr{G}$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes, induit sur $\mathscr{G}$ par la relation 2.8.4. On le notera encore $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$.

Par analogie aux flots d'Anosov, on définit les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de $(G\Lambda, \Phi_T)$. En $\gamma \in G\Lambda$, ils sont respectivement définis par:

$$W^{ss}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \,\middle|\, |\Phi_T(\eta) - \Phi_T(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\}$$

$$W^{uu}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \,\middle|\, |\Phi_{-T}(\eta) - \Phi_{-T}(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\} .$$

Ils forment un feuilletage Φ_T-invariant de $G\Lambda$. D'après 2.3.1, ils sont liés aux horosphères de la manière suivante:

$$(2.8.5)\quad \begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,. \end{aligned}$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à Λ privé d'un point. On définit les sous-ensembles fortement stables et instables de $(\mathscr{E}, \Phi_T)$ par:

2.8.6. DÉFINITION. *Soit π la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$, alors:*

$$W^{ss}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{ss}(\gamma))$$
$$W^{uu}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{uu}(\gamma))\,.$$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de $G\Lambda$ en γ, est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de γ sous Φ_T. En d'autres termes:

$$W^{s}(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\}$$
$$W^{u}(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,.$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de $\mathscr{E}$. D'après la définition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de $G\Lambda$, via la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$.

2.9. LE PARAMÉTRAGE DE HOPF DE $(\mathscr{E}, \Phi_T)$

Choisissons une origine x dans X. Soit Δ la diagonale de $\Lambda \times \Lambda$. On définit une application de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ dans $G\Lambda$, de la manière suivante: à

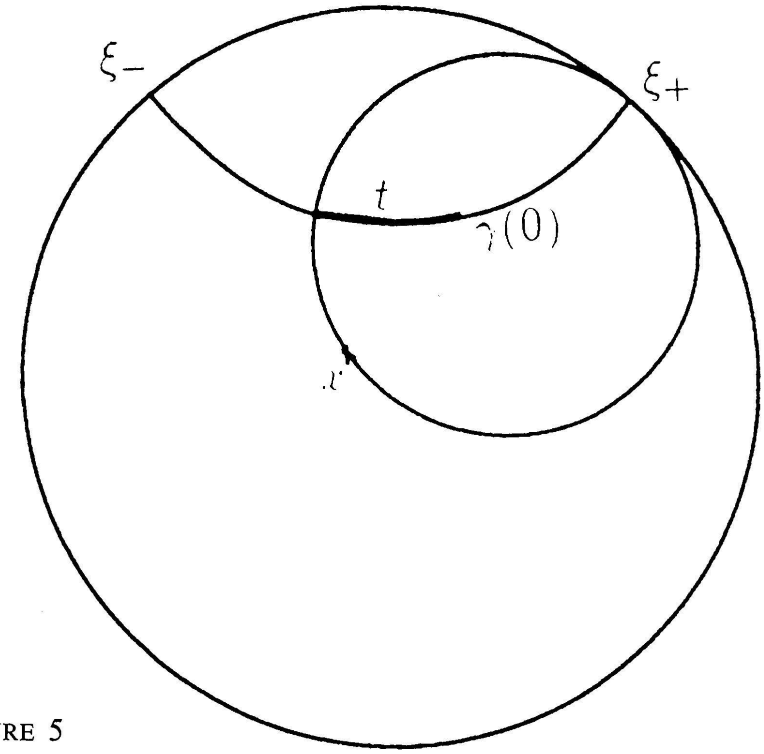

FIGURE 5