3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $f \in \langle D_m(q) \rangle$;

b) $a \in \langle D(q) \rangle$ *et* $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$ *pour tout* $i = 1, \ldots, r$;

c) $a \in \langle D(q) \rangle$ *et* $q_{k(f_i)}$ *est isotrope pour tout* $i = 1, \ldots, r$.

En particulier, on a:

COROLLAIRE. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *irréductible et unitaire. Alors* $f \in \langle D_m(q) \rangle$ *si et seulement si* $q_{k(f)}$ *est isotrope.*

Remarquons qu'il y a une forte analogie entre le théorème 1 et le résultat suivant de Knebusch [3]:

THÉORÈME 2. *Soit* q *une forme quadratique anisotrope qui représente* 1. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$, *et soient* $a \in k^*, f_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *irréductibles, unitaires et distincts tels que* $f = a f_1 \ldots f_r$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $f \in G_m(q)$;

b) $a \in G(q)$ *et* $f_i \in G_m(q)$ *pour tout* $i = 1, \ldots, r$;

c) $a \in G(q)$ *et* $q_{k(f_i)}$ *est hyperbolique pour tout* $i = 1, \ldots, r$.

COROLLAIRE. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *irréductible et unitaire. Alors* $f \in G_m(q)$ *si et seulement si* $q_{k(f)}$ *est hyperbolique.*

Remarque. Si q est une forme de Pfister, alors les théorèmes 1 et 2 sont équivalents. En effet, une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (voir par exemple [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, §1), et les groupes $G(q_E)$ et $\langle D(q_E) \rangle$ coïncident pour toute extension E de k.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$. On dit que f est *normé* (par rapport à q) si le coefficient du terme de plus haut degré de f appartient à $\langle D(q) \rangle$.

Une *représentation primitive* de q sur $k[X_1, \ldots, X_m]$ est un polynôme de la forme $q(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ premiers entre eux dans leur ensemble.

LEMME. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *un polynôme irréductible et normé. Supposons que* f *divise une représentation primitive de* q *sur* $k[X_1, \ldots, X_m]$. *Alors* $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

Il suffit de considérer le cas où q est anisotrope. Montrons ce lemme par récurrence sur le nombre de X_i qui interviennent dans f et sur $\deg_{X_1}(f)$. Si f est constant, alors par hypothèse $f \in <D(q)> \subset <D_m(q)>$. Le lemme est donc vrai dans ce cas. Supposons que X_1 intervienne dans f. Le polynôme f divise $q(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$, non tous divisibles par f. Considérons f et les ϕ_i comme des polynômes de $k(X_2, \ldots, X_m)[X_1]$. Réduisons les ϕ_i modulo f, et notons $\bar{\phi}_i$ les polynômes réduits. Multiplions-les par leur dénominateur commun, lequel est un élément de $k[X_2, \ldots, X_m]$, et soient $\phi'_1, \ldots, \phi'_n$ les polynômes de $k[X_1, \ldots, X_m]$ ainsi obtenus. On a donc

$$fh = q(\phi'_1, \ldots, \phi'_n)$$

avec $h, \phi'_1, \ldots, \phi'_n \in k[X_1, \ldots, X_m]$, et $\deg_{X_1}(\phi'_i) < \deg_{X_1}(f)$. Alors on a aussi $\deg_{X_1}(h) < \deg_{X_1}(f)$. Par hypothèse de récurrence, $h \in <D_m(q)>$. On a donc $f \in <D_m(q)>$.

Démonstration du théorème 1.

a) $\Rightarrow$ *c*): Comme $f \in <D_m(q)>$, le coefficient a du terme de plus haut degré de f est dans $<D(q)>$. L'hypothèse entraîne aussi qu'il existe $x_1, \ldots, x_s \in k[X_1, \ldots, X_m]^n$ tels que $q(x_1), \ldots, q(x_s)$ soient des représentations primitives de q sur $k[X_1, \ldots, X_m]$, et que l'on ait l'égalité

$$f = af_1 \ldots f_r = q(x_1) \ldots q(x_s)$$

dans $k(X_1, \ldots, X_m)^* / k(X_1, \ldots, X_m)^{*2}$. Comme les polynômes f_i sont irréductibles et distincts, chacun d'entre eux divise l'un des $q(x_j)$. En réduisant x_j modulo f_i, on obtient un zéro non trivial de q sur $k(f_i)$.

c) $\Rightarrow$ *b*): Comme $q_{k(f_i)}$ est isotrope, f_i divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \ldots, X_m]$. Par le lemme, $f_i \in <D_m(q)>$.

b) $\Rightarrow$ *a*) est trivial.

4. Extensions finies – le théorème de Springer

Soit $m = 1$, et notons $X = X_1$. Le corps $k(f)$ est alors une extension finie de k. Le corollaire du théorème entraîne le théorème de Springer [8]:

THÉORÈME DE SPRINGER. *Si une forme quadratique devient isotrope sur une extension de degré impair, alors elle est isotrope.*