

7. Applications

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

forme quadratique f comme $f \simeq \langle 1 \rangle \oplus f'$. Alors $k(f) = F(\sqrt{-f'(X')})$, où $X' = (X_2, \dots, X_m)$ et $F = k(X')$. Supposons $q_{k(f)}$ isotrope. Alors par [4], 2.5.1, on a:

$$q_F \simeq a \langle 1, f'(X') \rangle \oplus q' \simeq \langle a \rangle \oplus q'' .$$

Donc $a \in D(q_F) \subset D_m(q)$.

D'autre part, $\langle 1, f'(X') \rangle$ représente f sur $F(X_1) = k(X_1, \dots, X_m)$. Donc $a \langle 1, f'(X') \rangle$ représente af sur $k(X_1, \dots, X_m)$. On en déduit que $af \in D_m(q)$. Comme $a \in D_m(q)$, on a $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

7. APPLICATIONS

Voici quelques applications du théorème 1:

SOMMES DE CARRÉS

COROLLAIRE 1. *Soit s un entier positif. Si un polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$, alors tout polynôme irréductible et unitaire divisant f avec un exposant impair est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$.*

Soit q la forme quadratique somme de 2^s carrés. Alors q est une forme de Pfister, donc $D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [4], chap. 2, §10 ou [3], chap. 10, cor. 1.7). Le corollaire découle de l'implication $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, appliqué au produit des polynômes irréductibles divisant f avec un exposant impair.

Le cas $m = 1$ de ce corollaire est dû à Kaplansky (cf. [4], chap. 10, cor. 2.10).

PRINCIPE DE HASSE

Soit k un corps de nombres. On note v une place (finie ou infinie) de k , et k_v le complété de k en v . Soit q une forme quadratique anisotrope sur k .

COROLLAIRE 2. *Soit $f \in k[X]$. Alors*

$$f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle \text{ pour toute place } v \text{ de } k \Leftrightarrow f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle .$$

Il est clair que $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle \Rightarrow f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle$ pour toute place v de k .

Montrons la réciproque. Par le théorème de Hasse-Minkowski (voir par exemple [4], chap. 6, §6, cor. 6.6 a)), si $a \in k$ est tel que $a \in D(q_{k_\nu})$ pour toute place ν de k , alors $a \in D(q)$. Donc, par la partie $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, on peut supposer que f est irréductible et unitaire.

Supposons que $f \in \langle D(q_{k_\nu(X)}) \rangle$ pour toute place ν de k . Alors la partie $b) \Rightarrow c)$ du théorème 1 implique que $q_{k_\nu(f)}$ est isotrope pour toute place ν de k . Par le théorème de Hasse-Minkowski (cf. [4], chap. 6, §6, th. 6.5), on en déduit que $q_{k(f)}$ est isotrope. Donc, par la partie $c) \Rightarrow b)$ du théorème 1, $f \in D(q_{k(X)})$.

UNE VARIANTE DU NOMBRE DE PYTHAGORE

Pour tout corps F et pour tout entier $n \geq 1$, on note $D_F(n) \subset F^*/F^{*2}$ l'ensemble des sommes de n carrés d'éléments de F , et $\langle D_F(n) \rangle$ le sous-groupe de F^*/F^{*2} engendré par $D_F(n)$.

Lorsque $F = k(X_1, \dots, X_m)$, on note $D_m(n) = D_F(n)$.

Rappelons que le *niveau* d'un corps F , noté $s(F)$, est par définition le plus petit entier s tel que $-1 \in D_F(s)$. Si -1 n'est pas une somme de carrés dans F , alors on pose $s(F) = \infty$, et l'on dit que F est *formellement réel*.

COROLLAIRE 3. *Supposons que k soit formellement réel. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible et unitaire. Alors*

$$f \in \langle D_m(n) \rangle \Leftrightarrow s(k(f)) < n .$$

Soit q la forme quadratique somme de n carrés. Comme k est formellement réel, q est anisotrope. Il est clair que

$$s(k(f)) < n \Leftrightarrow q_{k(f)} \text{ isotrope .}$$

Par le corollaire du théorème 1, on a

$$q_{k(f)} \text{ isotrope} \Leftrightarrow f \in \langle D_m(n) \rangle .$$

Ceci démontre le corollaire.

Soit $D_F(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_F(n)$. Le *nombre de Pythagore* $p(F)$ de F est le plus petit entier n tel que $D_F(n) = D_F(\infty)$. S'il n'existe aucun entier avec cette propriété, alors on pose $p(F) = \infty$.

Notation. On note $p'(F)$ le plus petit entier n tel que $\langle D_F(n) \rangle = D_F(\infty)$. S'il n'existe aucun entier avec cette propriété, alors on pose $p'(F) = \infty$.

COROLLAIRE 4. *Supposons que k soit formellement réel, et que $m \geq 1$. Alors $p'(k(X_1, \dots, X_m)) = \sup\{s(k(f)) + 1, f \in k[X_1, \dots, X_m] \text{ unitaire et irréductible, avec } s(k(f)) < \infty\}$.*

Démonstration. Posons

$$p' = p'(k(X_1, \dots, X_m)),$$

$$p'' = \sup\{s(k(f)) + 1, f \in k[X_1, \dots, X_m] \text{ unitaire et irréductible, avec } s(k(f)) < \infty\}.$$

Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Si $f \in \langle D_m(n) \rangle$, alors par le corollaire 3 on a $s(k(f)) < n$. Donc $p'' \leq p'$. Réciproquement, si $s(k(f)) < n$ alors par le corollaire 3 $f \in \langle D_m(n) \rangle$ pour tout polynôme irréductible et unitaire de $k[X_1, \dots, X_m]$. Pour montrer que $p' \leq p''$, il reste donc à démontrer que $p'(k) \leq p''$. Soit $d \in k^*$ une somme de carrés, $d \notin k^{*2}$. Posons $f(X) = X^2 + d \in k[X]$. Alors f est un polynôme unitaire et irréductible. On a $k(f) = k(\sqrt{-d})$. Supposons que $s(k(f)) = n$. Alors il existe $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in k$ tels que $-1 = (a_1 + b_1\sqrt{-d})^2 + \dots + (a_n + b_n\sqrt{-d})^2$. Alors $-1 = a_1^2 + \dots + a_n^2 - d(b_1^2 + \dots + b_n^2)$. Donc $d(b_1^2 + \dots + b_n^2)^2 = (a_1^2 + \dots + a_n^2 + 1) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2)$. Ceci entraîne que $d \in \langle D_k(n+1) \rangle$.

En utilisant des résultats de Colliot-Thélène et Janssen [1], on obtient

COROLLAIRE 5. *Soient k un corps de nombres réel, X, Y et Z des variables. Alors*

- a) $p'(k(X)) = 2, 3$ ou 5 ;
- b) $p'(k(X, Y)) = 2, 3$ ou 5 ;
- c) $p'(k(X, Y, Z)) = 2, 3, 5$ ou 9 .

En effet, par [1], th. 4.1, (b) et (c), on voit que $s(k(f)) = 1, 2, 4$ ou ∞ si f est un polynôme irréductible et unitaire de $k[X]$ ou $k[X, Y]$ et $s(k(f)) = 1, 2, 4, 8$ ou ∞ si f est un polynôme irréductible et unitaire de $k[X, Y, Z]$. Par le corollaire précédent, ceci démontre l'affirmation.

Le corollaire ci-dessus et les résultats et conjectures de [1] suggèrent la conjecture suivante:

CONJECTURE. *Soit k un corps de nombres réel, et soient X_1, \dots, X_m des variables, $m \geq 4$. Alors $p'(k(X_1, \dots, X_m))$ est de la forme*

$$p'(k(X_1, \dots, X_m)) = 2^r + 1,$$

où $r \in \{0, \dots, m\}$.

Finalement, remarquons que le cas des corps de nombres totalement imaginaires est beaucoup plus simple :

PROPOSITION. *Soit k un corps de nombres totalement imaginaire. Alors*

$$p'(k(X_1, \dots, X_m)) = 2, 3 \text{ ou } 5,$$

quel que soit $m \geq 1$.

En effet, si k est totalement imaginaire, alors $s(k) = 1, 2$ ou 4 (voir par exemple [4], chap. XI). Comme tout élément d'un corps de caractéristique différente de 2 peut s'écrire comme différence de deux carrés, on a $p(k(X_1, \dots, X_m)) \leq 5$, quel que soit m . Le lemme suivant montre que si $p(k(X_1, \dots, X_m)) = 4$, alors $p'(k(X_1, \dots, X_m)) \leq 3$. Ceci démontre la proposition.

LEMME. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Alors*

$$D_F(4) \subset D_F(3) \cdot D_F(3) \subset \langle D_F(3) \rangle.$$

Soit $H = (-1, -1)$ l'algèbre de quaternions de Hamilton sur F . Soit H' le sous-groupe additif des quaternions purs de H . Notons N la norme réduite. Alors $N(H) = D_F(4)$, $N(H') = D_F(3)$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier que pour tout $a \in H$, il existe $b \in H'$ tel que $ab \in H'$. Mais cette condition consiste en une équation linéaire en trois variables, laquelle a toujours une solution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et U. JANNSEN. Sommes de carrés dans les corps de fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris* 312 (1991), 759-762.
- [2] GILLE, Ph. R -équivalence et principe de norme en cohomologie galoisienne. *C. R. Acad. Sci. Paris* 316 (1993), 315-320.
- [3] KNEBUSCH, M. Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem. *Acta Arithmetica* 24 (1973), 279-299.
- [4] LAM, T. Y. *Algebraic Theory of Quadratic Forms*. Benjamin (1973).
- [5] MERKURJEV, A. Norm principle for algebraic groups. *Journal Algebra and Analysis*, à paraître.
- [6] ———. R -equivalence on adjoint classical groups. Notes manuscrites, octobre 1993.
- [7] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian Forms*. Grundlehren Math. Wiss 270, Springer-Verlag (1985).