

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** JACOBI SUMS AND STICKELBERGER'S CONGRUENCE  
**Autor:** Conrad, Keith

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61822>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

we see

$$J(\omega_p^{-k_1}, \dots, \omega_p^{-k_r}) \cdot \frac{q!}{(-p)^{\frac{q-1}{p-1}}} \equiv \frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \pmod{\mathfrak{P}},$$

so the congruence

$$\frac{q!}{(-p)^{\frac{q-1}{p-1}}} = \frac{q!}{(-p)^{\text{ord}_p(q!)}} \equiv H_p(q) = 1 \pmod{p}$$

settles Case 3.

Finally, in Case 4, Stickelberger's congruence and Lemma 3 imply that

$$\frac{J(\omega_p^{-k_1}, \dots, \omega_p^{-k_r})}{(\zeta_p - 1)^{s_q(k_1) + \dots + s_q(k_r) - s_q(k_1 + \dots + k_r)}} \equiv \frac{h_q(k_1 + \dots + k_r)}{h_q(k_1) \cdot \dots \cdot h_q(k_r)} \pmod{\mathfrak{P}},$$

so

$$\frac{J(\omega_p^{-k_1}, \dots, \omega_p^{-k_r})}{(\zeta_p - 1)^{(p-1)\text{ord}_p\left(\frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}\right)}} \equiv \frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \cdot \frac{1}{(-p)^{\text{ord}_p\left(\frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}\right)}} \pmod{\mathfrak{P}},$$

since  $s_q(k_i) = S_p(k_i)$  and  $s_q(k_1 + \dots + k_r) = S_p(k_1 + \dots + k_r)$ . Thus

$$J(\omega_p^{-k_1}, \dots, \omega_p^{-k_r}) \equiv \frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \pmod{\mathfrak{P}}. \quad \square$$

#### REFERENCES

- [1] COLEMAN, R. The Gross-Koblitz Formula. In: *Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry*. North-Holland, New York, 1987, 21-52.
- [2] DICKSON, L.E. The Analytic Representation of Substitutions of a Prime Number of Letters with a Discussion of the Linear Group. *Ann. of Math. (1)* 11 (1896-1897), 65-120.
- [3] ——— *History of the Theory of Numbers*, vol. 1. Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1971.
- [4] FINE, N.J. Binomial coefficients modulo a prime. *Amer. Math. Monthly* 54 (1947), 589-592.
- [5] GROSS, B.H. and N. KOBLITZ. Gauss sums and the  $p$ -adic  $\Gamma$ -function. *Ann. of Math.* 109 (1979), 569-581.
- [6] IRELAND, K. and M. ROSEN. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [7] LANG, S. *Cyclotomic Fields I and II*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [8] LIDL, R. and H. NIEDERREITER. *Finite Fields*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 20. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1983.

- [9] LUCAS, E. Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier. *Bull. Soc. Math. France* 6 (1877-1878), 49-54.
- [10] STICKELBERGER, L. Über eine Verallgemeinerung der Kreistheilung. *Math. Ann.* 37 (1890), 321-367.
- [11] WASHINGTON, L. *Introduction to Cyclotomic Fields*. Springer-Verlag, New York, 1982.

(Reçu le 21 juin 1994)

Keith Conrad

Department of Mathematics  
Harvard University  
Cambridge, MA 02138 (U.S.A.)

**Vide-leer-empty**