

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ POUR LES SURFACES MINIMALES DE $E^3$

par Oscar BURLET et François HAAB<sup>1</sup>

### 1. INTRODUCTION

Le problème de la rigidité des surfaces (sous-variétés de dimension deux) dans l'espace euclidien  $E^3$  consiste à savoir dans quelle mesure deux surfaces peuvent être isométriques, sans que cette isométrie soit réalisée par une isométrie globale de  $E^3$ . Pour des raisons pratiques, nous appelons *congruence* une isométrie globale de  $E^3$  et nous disons que deux surfaces sont *congruentes* si elles se correspondent par une congruence. La question que nous nous posons est donc de savoir si une surface donnée dans  $E^3$  est la seule, à congruence près, qui lui soit isométrique? Si la réponse est oui, nous dirons qu'elle est *rigide*.

L'un des résultats les plus anciens dans cette direction est probablement le théorème de Cauchy qui affirme qu'une surface polyédrale convexe est rigide. En ce qui concerne les surfaces lisses qui nous préoccupent ici, on peut mentionner le théorème de Cohn-Vossen [4], qui affirme que deux surfaces analytiques, convexes et compactes qui sont isométriques sont nécessairement congruentes. Ce résultat a été étendu, par Herglotz au cas des surfaces trois fois continument différentiables ( $C^3$ ). Il s'avère qu'il est encore vrai dans le cas des surfaces  $C^2$  mais qu'il est faux dans le cas des surfaces  $C^1$ , voir Connelly [6]. Par ailleurs un résultat d'Alexandroff [1] affirme que si deux surfaces analytiques tendues, dans  $E^3$ , sont isométriques elles sont congruentes (une surface dans  $E^3$  est dite *tendue* si tout plan de  $E^3$  la divise en au plus deux composantes connexes).

Rappelons qu'une surface est dite *minimale* si sa courbure moyenne est nulle. A notre connaissance on ne sait pas s'il existe des surfaces minimales, rigides au sens précédent. En revanche, pour les surfaces minimales, Choi,

---

<sup>1</sup>) Les recherches du second auteur ont été partiellement soutenues par le CNPQ-Brésil (subvention: 301003/90.4).

Meeks et White ont introduit récemment la notion de *rigidité minimale*, rappelée plus bas [3]. Ces auteurs ont aussi établi des critères pour montrer que certaines surfaces sont minimalement rigides. Ainsi le caténoïde est une surface minimalement rigide, comme d'ailleurs toute surface minimale à deux bouts (voir plus bas ou voir [3]). Par contre toute surface minimale simplement connexe, dont la courbure de Gauss n'est pas identiquement nulle, n'est *pas* minimalement rigide (voir théorème 1). Si la courbure de Gauss d'une surface minimale complète est identiquement nulle, Osserman montre que cette surface est un plan, elle est donc minimalement rigide [10]. Cette rigidité minimale reste vraie pour une surface minimale connexe, avec courbure de Gauss nulle et qui n'est pas nécessairement complète. En effet, dans ce cas, la surface en question est un ouvert d'un plan et toute isométrie entre ouverts plans connexes est une congruence. Remarquons qu'un plan est minimalement rigide, sans être rigide (on peut le courber). Cette propriété n'est pas spécifique au plan. Dans le chapitre d'exemples, nous donnons une surface réglée isométrique et non congruente au caténoïde.

Notre premier objectif dans ce travail est de reformuler certains critères de [3], d'en donner de nouvelles preuves, et d'en déduire quelques conséquences non explicites dans [3]. L'une de ces conséquences est qu'une surface minimale non orientable immergée isométriquement dans  $E^3$  est minimalement rigide. Le résultat principal de [3] dit qu'une surface minimale complète proprement plongée dans  $E^3$  qui possède plus d'un bout est minimalement rigide. Nous en redonnons ici la démonstration dans le cas plus simple où la courbure totale est finie. Récemment, Collin [5] a montré que cette condition sur la courbure totale est équivalente à la finitude du type topologique, ceci pour les surfaces minimales proprement plongées ayant au moins deux bouts. Lorsqu'on considère des surfaces immergées il n'en va plus de même. Nous exhibons dans le chapitre d'exemples un anneau minimal complet, immergé dans  $E^3$ , et qui n'est pas minimalement rigide.

## 2. RÉSULTATS

Nous convenons ici qu'une *surface*  $M$  est une variété riemannienne de dimension deux qui est connexe, sans bord, séparée, à base dénombrable et infiniment différentiable. Une surface n'est pas nécessairement complète. Deux immersions isométriques  $f, g$  de  $M$  dans l'espace euclidien  $E^3$  de dimension trois sont *congruentes* s'il existe une isométrie  $A$  de  $E^3$  telle que  $g = A \circ f$ . Une immersion isométrique  $f: M \rightarrow E^3$  est *minimale* si, pour tout  $p \in M$ , il