3. DÉMONSTRATIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

où a et b sont des entiers fixés avec $|a| > |b| > 0$. La famille $Z_\theta(u, v)$, $\theta \in [0, 2\pi[$, est donnée par

$$Z_\theta(u, v) = \left\{ (b \operatorname{ch} av + a \operatorname{sh} av) \frac{\cos(bu - \theta)}{(a^2 - b^2)} \begin{pmatrix} \cos au \\ \sin au \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + (a \operatorname{ch} av + b \operatorname{sh} av) \frac{\sin(bu - \theta)}{(a^2 - b^2)} \begin{pmatrix} \sin au \\ -\cos au \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{b} \sin(bu - \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{bv}.$$

3. Démonstrations

Soit M une surface orientée et $f : M \to E^3$ une immersion isométrique. Nous définissons l'*application de Gauss* de f, notée $G : M \to \mathscr{S}^2$, en posant:

$$G(p) = T_p f(e_1) \wedge T_p f(e_2)$$

où (e_1, e_2) est une base orthonormée, positivement orientée de $T_p M$ et $T_p f$ est la dérivée de f en p. Dans cette définition $\mathscr{S}^2$ désigne la sphère unité centrée à l'origine dans l'espace euclidien et le symbole «$\wedge$» y représente le produit vectoriel. L'application G est ainsi associée à f et à l'orientation de M. Un changement d'orientation de M a pour effet de changer G en $-G$. Lorsque M n'est pas orientable nous définissons l'application de Gauss comme étant l'application de M dans le plan projectif $\mathscr{P}^2$ qui associe à chaque $p \in M$ le sous-espace orthogonal à $T_p f(T_p M)$ dans E^3.

L'application de Gauss et la courbure de Gauss de M sont intimement liées. Pour le voir, prenons M orientée et convenons de noter ω_M sa *forme volume.* C'est par définition la 2-forme différentielle prenant la valeur 1 sur tout repère orthonormé et positivement orienté, tangent à M. Par exemple la forme volume de la sphère $\mathscr{S}^2$, munie de l'orientation appropriée, est donnée par $\omega_{\mathscr{S}^2}(p; v_1, v_2) = \det(p, v_1, v_2)$. La forme différentielle induite de $\omega_{\mathscr{S}^2}$ par G sur M est une 2-forme différentielle, notée $G^\# \omega_{\mathscr{S}^2}$, qui est nécessairement du type $K\omega_M$ où K est une fonction sur M. Cette fonction est précisément la *courbure de Gauss* de M. On démontre que $K(p)$ est aussi le déterminant de l'application $T_p G \circ (T_p f)^{-1}$, considérée comme endomorphisme de $T_p f(T_p M)$ (remarquer que $T_{G(p)} \mathscr{S}^2 = T_p f(T_p M)$). En particulier si la courbure de Gauss est non nulle en $p \in M$, l'application de

Gauss est inversible au voisinage de p. La théorie de Weierstrass montre que l'application de Gauss G est conforme, au voisinage d'un point de courbure de Gauss non nulle, lorsque l'immersion isométrique f est minimale.

Rappelons qu'une application différentiable $h: M \to N$ entre variétés riemanniennes (M, g_M) et (N, g_N) est conforme si $h^{\#} g_N = \lambda \cdot g_M$ où λ est une fonction positive. Il est équivalent de dire que la dérivée de h conserve la mesure des angles.

PROPOSITION 1. *Soit M une surface orientée et f, f^* deux immersions isométriques dans E^3. Si f et f^* sont minimales, il existe une rotation R de E^3, telle que $R \circ f$ et f^* ont même application de Gauss.*

Ainsi, lorsque f et f^* sont minimales, elles ont même application de Gauss à congruence près. La propriété, pour deux immersions isométriques f et f^*, d'avoir même application de Gauss n'implique généralement pas leur congruence, notamment lorsqu'elles sont minimales. Par contre nous avons la proposition suivante, essentiellement due à Darboux [7].

PROPOSITION 2. *Soit M une surface orientée et f, f^* deux immersions isométriques dans E^3 dont les applications de Gauss coïncident. Si en chaque point $p \in M$ la courbure moyenne de f ou de f^* est non nulle, les deux immersions f et f^* sont congruentes.*

Une démonstration de la proposition 2 est donnée dans l'annexe I. Venons-en à la preuve de la proposition 1.

Preuve. Nous montrons d'abord que les applications de Gauss G et G^* associées à deux immersions isométriques minimales f et f^* sont congruentes. Si la courbure de Gauss de M s'annule partout les applications G et G^* sont constantes et l'affirmation est alors banale. Sinon la théorie de Weierstrass montre que cette courbure ne s'annule que sur un ensemble fermé discret de M. Alors la composée $G^* \circ G^{-1}$ définit une application conforme d'un ouvert de $\mathcal{S}^2$ sur un ouvert de $\mathcal{S}^2$. L'égalité

$$(G^*)^{\#} \omega_{\mathcal{S}^2} = K \omega_M = G^{\#} \omega_{\mathcal{S}^2}$$

montre que l'application $G^* \circ G^{-1}$ conserve aussi la forme volume de $\mathcal{S}^2$. Or une application conforme de la sphère qui préserve le volume est nécessairement une isométrie et une telle isométrie est une rotation de E^3, puisque l'orientation est conservée. Ainsi $G^* = R \circ G$ où R est une rotation. L'égalité est vraie dans tout M parce qu'elle est vraie dans un ouvert dense.

Revenons à l'application f. Il est immédiat que $R \circ f$ est, comme f, une immersion isométrique minimale de M et que son application de Gauss égale $R \circ G$. Nous en déduisons que $R \circ f$ et f^* ont même application de Gauss. $\square$

Notre étude comparative d'immersions isométriques minimales d'une surface M dans E^3 s'appuie sur quelques notions de la théorie des singularités d'applications différentiables entre surfaces, que nous allons maintenant préciser. Un point *singulier* pour une application différentiable $h: M \to N$, entre surfaces, est un point $p \in M$ où la dérivée $T_p h$ n'est pas de rang maximum. Un point singulier p est de *type pli,* respectivement de *type cusp,* si dans des coordonnées locales convenables de M en p et de N en $h(p)$, l'application h est donnée par:

$$(x, y) \mapsto (x^2, y)$$

respectivement

$$(x, y) \mapsto (x^3 - xy, y) .$$

Une application $h: M \to N$ est 2-*générique* si elle n'admet que des points singuliers de type pli ou de type cusp. Dans ce cas l'*ensemble singulier* $\Sigma(h)$ est une sous-variété fermée de dimension un dans M et les points de type cusp en forment un sous-ensemble fermé discret. Notons que $h(\Sigma(h))$ n'est en général pas une sous-variété de N.

Pour un vecteur unitaire $z \in E^3$ nous notons E_z le sous-espace des vecteurs orthogonaux à z et π_z la projection orthogonale de E^3 sur E_z. L'espace E_z est de dimension deux et si $f: M \to E^3$ est une immersion isométrique, nous pouvons affirmer que l'application $\pi_z \circ f$ de M dans E_z est générique au voisinage de tout point de M où la courbure de Gauss est non nulle, pour presque tout z. Observons qu'un point $p \in M$ est critique pour $\pi_z \circ f$ si et seulement si $z \in T_p f(T_p M)$ c'est-à-dire si et seulement si $G(p) \in E_z$ où G désigne l'application de Gauss de f. Ainsi pour toute immersion isométrique $f: M \to E^3$ l'ensemble singulier de $\pi_z \circ f$ est donné par $\Sigma(\pi_z \circ f) = G^{-1}(E_z)$.

Nous noterons $\Sigma_z(f)$ l'ensemble singulier de $\pi_z \circ f$. En particulier si f et f^* sont deux immersions isométriques de M dans E^3 avec même application de Gauss, nous avons l'égalité

$$\Sigma_z(f) = \Sigma_z(f^*) \quad \text{pour tout } z \in \mathscr{S}^2 .$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible nous écrivons Σ_z à la place de $\Sigma_z(f)$.

Soit U l'ensemble $\{p \in M \mid K(p) \neq 0\}$. C'est un sous-ensemble ouvert de M et si f est une immersion isométrique minimale, U est soit vide, soit le complémentaire d'un ensemble fermé discret. Dans tous les cas $U \cap \Sigma_z$ est une sous-variété de dimension un de U quel que soit $z \in \mathscr{S}^2$. Nous allons d'abord montrer que la fonction

$$U \cap \Sigma_z \ni p \mapsto \theta(p) = \angle_p(f(\Sigma_z), f^*(\Sigma_z))$$

est localement constante quel que soit $z \in \mathscr{S}^2$. Remarquons que cet angle est par définition l'angle entre les vecteurs $T_p f(\zeta)$ et $T_p f^*(\zeta)$ de E^3, où ζ est un vecteur unitaire tangent à Σ_z en p. Nous en déduirons, sous certaines hypothèses, que l'angle entre $T_p f(\xi)$ et $T_p f^*(\xi)$ est indépendant de p et de $\xi \in T_p M$.

Adoptons la terminologie suivante. Soit M une surface et $f: M \to E^3$ une application différentiable. Nous appelons *différentielle extérieure* de f la forme différentielle df, de degré un dans M et à valeurs dans E^3, définie par

$$df(p; \xi) = T_p f(\xi) \quad \text{pour } p \in M \quad \text{et } \xi \in T_p M\,.$$

PROPOSITION 3. *Soit M une surface, orientable ou non, et f, f^* des immersions isométriques de M dans E^3, qui ont même application de Gauss. Si la courbure de Gauss de M est presque partout non nulle dans M, l'angle entre les vecteurs $df(p; \xi)$ et $df^*(p; \xi)$ dans E^3 est indépendant de $\xi \in T_p M$, $\xi \neq 0$, et de $p \in M$.*

La preuve s'appuie sur deux lemmes.

LEMME 1. *Soit U une surface orientée de courbure de Gauss partout non nulle et f, f^* des immersions isométriques de U dans E^3 ayant même application de Gauss. Alors l'angle entre $df(p; \xi)$ et $df^*(p; \xi)$ est indépendant de $\xi \in T_p U$ et indépendant de $p \in U$.*

Preuve. Remarquons d'emblée que l'angle entre les vecteurs $df(p; \xi)$ et $df^*(p; \xi)$ est indépendant de $\xi \in T_p U$. En effet, pour tout $p \in U$ les dérivées, $T_p f$ et $T_p f^*$, de f et f^* en p envoient $T_p U$ sur le même sous-espace orienté de E^3 et comme $T_p f$ et $T_p f^*$ sont des isométries qui préservent l'orientation, elles diffèrent par une rotation. Cet angle $\angle_p(df(p; \xi), df^*(p; \xi))$ qui est indépendant de $\xi \in T_p U$ est appelé angle entre entre df et df^* en p et nous le notons $\angle_p(df, df^*)$. Il s'agit donc de montrer que cet angle est indépendant de p.

Soit $z \in \mathscr{S}^2$ tel que $\pi_z \circ f$ est générique et Σ_z son ensemble singulier. Nous montrons d'abord que l'angle $\angle_p(df, df^*)$ est localement constant comme fonction de $p \in \Sigma_z$. Soit $\gamma : [a, b] \to \Sigma_z$ une paramétrisation locale isométrique et considérons le cylindre paramétré

$$\psi : [a, b] \times \mathbf{R} \to E^3 \quad \text{défini par} \quad (t, u) \mapsto f(\gamma(t)) + uz\,.$$

L'application ψ est une immersion sauf le long des droites $\{t_0\} \times \mathbf{R} \subset [a, b] \times \mathbf{R}$ pour lesquelles $\gamma(t_0)$ est un point cuspidal de Σ_z. Nous pouvons donc trouver un partage de $[a, b]$

$$a \leqslant t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1} \leqslant b$$

dont les points de partage correspondent par γ aux points cuspidaux de Σ_z contenus dans $\gamma([a, b])$.

Le chemin $\pi_z \circ \gamma : [t_i, t_{i+1}] \to E_z$ est une immersion sauf aux extrémités où la dérivée est nulle et ceci pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. La forme locale pour $\pi_z \circ f$, au voisinage d'un point cuspidal, montre que l'image $\psi([t_i, t_{i+1}] \times \mathbf{R})$ est un cylindre régulier C_i immergé dans E^3 et qui se projette orthogonalement sur la courbe $c_i = \pi_z \circ \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset E_z$. Notons également $c_i : [s_i, s_{i+1}] \to E_z$ la paramétrisation de c_i par l'abscisse curviligne. Alors l'application

$$\phi_i : [s_i, s_{i+1}] \times \mathbf{R} \to E^3 \quad \text{définie par} \quad (s, u) \mapsto c_i(s) + uz$$

est une immersion isométrique sur C_i. Désignons encore par C la réunion des C_i. Son développement dans un plan fournit une bande F_i, dont le bord est formé de deux droites parallèles, que nous pouvons supposer parallèles à z. La courbe $f \circ \gamma \,|\, [t_i, t_{i+1}]$ est une courbe lisse, tangente, en ses extrémités, aux composantes du bord de F_i. En recollant la bande F_i à la bande F_{i+1} le long de la composante du bord correspondant à $\psi(\{t_{i+1}\} \times \mathbf{R})$ de manière que F_i et F_{i+1} se trouvent dans le même demi-plan défini par la droite de recollement, on pourra prolonger le développement de $\psi([a, t_1] \times \mathbf{R})$ en une application de $C = \psi([a, b] \times \mathbf{R})$ dans le plan, qui est une isométrie dans chacune des bandes C_i. Par cette isométrie la partie $\psi([a, b] \times \{0\})$ est envoyée sur une courbe lisse C^2. Une construction analogue avec f^* à la place de f fournit un cylindre $C^* = \psi^*([a, b] \times \mathbf{R})$ qui peut être appliqué dans le plan, comme avant, par une isométrie sur chaque bande C_i^* et tel que $\psi^*([a, b] \times \{0\})$ est envoyé sur une courbe lisse C^2.

Notons λ et λ^* ces courbes planes lisses C^2, paramétrées par l'abscisse curviligne. Pour chaque i, les courbures de λ et λ^* dans $]t_i, t_{i+1}[$ coïncident parce que la courbure géodésique de $\gamma \mid]t_i, t_{i+1}[$ dans U égale celle de $f \circ \gamma \mid]t_i, t_{i+1}[$ dans le cylindre C_i et celle de $f^* \circ \gamma \mid]t_i, t_{i+1}[$ dans le cylindre C_i^*.

Nous savons en effet que si deux surfaces dans E^3 sont tangentes le long d'une courbe lisse, la courbure géodésique de cette dernière est la même dans chacune des deux surfaces ([2], p. 249). Les deux surfaces sont orientées et les orientations coïncident le long de la courbe de contact.

Or ces cylindres sont isométriques aux bandes F_i et F_i^*, par des isométries qui envoient $f \circ \gamma \mid]t_i, t_{i+1}[$ sur λ et $f^* \circ \gamma \mid]t_i, t_{i+1}[$ sur λ^* respectivement. Comme λ et λ^* sont des chemins C^2 de $[a, b]$ dans E^2, paramétrés par l'abscisse curviligne, nous en déduisons que λ et λ^* ont partout même courbure et diffèrent par une isométrie de E^2.

En particulier l'angle entre les vecteurs vitesses $\lambda'(t)$ et $\lambda^{*\prime}(t)$ est constant. Mais ces vecteurs vitesses égalent respectivement $df(\gamma(t); \gamma'(t))$ et $df^*(\gamma(t); \gamma'(t))$. De là on déduit alors que l'angle $\angle_{\gamma(t)}(df, df^*)$ est une fonction constante de t. Pour voir que l'angle $\angle_p(df, df^*)$ est une fonction constante de p dans U, il suffit, en vertu de la connexité de U, de remarquer qu'il est localement constant. Or cela est bien vrai puisque G est un difféomorphisme local et par suite deux points suffisamment voisins dans U peuvent être approximés par des points situés sur des lignes de pli Σ_z pour des z convenables (i.e. $\pi_z \circ f$ générique). Ceci termine la démonstration du lemme 1. □

COROLLAIRE 1. *Soit M une surface orientée et f, f^* des immersions isométriques de M dans E^3, avec même application de Gauss. Si la courbure de Gauss de M est presque partout non nulle dans M, l'angle $\angle_p(df, df^*)$ est indépendant de p.*

Ce corollaire résulte immédiatement du lemme précédent par continuité de cet angle. En effet, dire que la courbure de Gauss est presque partout non nulle c'est dire qu'elle est non nulle dans un ouvert dense de M.

LEMME 2. *Soit M une surface non orientable et f, f^* des immersions isométriques de M dans E^3, avec même application de Gauss. Si la courbure de Gauss de M est presque partout non nulle dans M, l'angle $\angle_p(df, df^*)$ est indépendant de p.*

Preuve. Le revêtement orientable à deux feuillets de M est une surface orientable $\hat{M}$ avec une projection de revêtement π de $\hat{M}$ sur M qui est localement une isométrie. Orientons $\hat{M}$. Alors $f \circ \pi$ et $f^* \circ \pi$ sont des immersions isométriques de $\hat{M}$ dans E^3, avec même application de Gauss.

Le corollaire précédent montre que l'angle $\angle_p(d(f \circ \pi), d(f^* \circ \pi))$ est indépendant de p. Mais c'est aussi l'angle $\angle_{\pi(p)}(df, df^*)$. De la surjectivité de π nous en déduisons que l'angle $\angle_q(df, df^*)$ est indépendant de $q \in M$. $\square$

Preuve de la proposition 3. Elle résulte immédiatement des lemmes 1 et 2 ainsi que du corollaire 1. $\square$

Voyons comment reformuler le lemme fondamental dans le langage des formes différentielles. Soit M une surface orientée. Nous pouvons associer à tout $\xi \in T_pM$ le vecteur $\star\xi \in T_pM$, orthogonal à ξ et de même norme et tel que, pour $\xi \neq 0$, la base $(\xi, \star\xi)$ fournit l'orientation donnée de T_pM. La correspondance $\xi \mapsto \star\xi$ est alors une rotation de T_pM et $\star\star\xi = -\xi$.

En fait on peut montrer que la structure conforme, sous-jacente à la métrique riemannienne, et l'orientation définissent une structure complexe sur M. Pour cette structure l'opération $\xi \mapsto \star\xi$ n'est autre que la multiplication par i. A l'aide de cette opération nous définissons la forme différentielle suivante

$$\star df(p; \xi) = df(p; \star\xi) \quad \text{pour } p \in M \quad \text{et } \xi \in T_pM\,.$$

C'est une 1-forme dans M à valeurs dans E^3. Dans le cas où f est une immersion isométrique, nous pouvons observer que pour chaque $p \in M$ et chaque vecteur unitaire $\xi \in T_pM$, la base $(df(p;\xi), \star df(p;\xi), G(p))$ est orthonormée et définit l'orientation canonique de E^3. Il en résulte que

$$\star df(p;\xi) = G(p) \wedge df(p;\xi) \quad \text{pour tout } p \in M \quad \text{et tout } \xi \in T_pM\,.$$

Plus brièvement nous pouvons écrire

$$\star df = G \wedge df\,.$$

Un calcul direct, par exemple dans des coordonnées conformes, montre que

$$d \star df = 2\mathbf{H}\omega_M$$

où ω_M est la forme volume de M et $\mathbf{H} = H \cdot G$ *est le vecteur courbure moyenne,* produit de la courbure moyenne H et de l'application de Gauss. En particulier la forme $\star df$ est fermée, c'est-à-dire de différentielle nulle, si et seulement si f est minimale.

THÉORÈME 1. *Soit M une surface orientée, avec courbure de Gauss non identiquement nulle, et f une immersion isométrique minimale* *de* M *dans* E^3. *Alors la forme différentielle* $\star df$ *est exacte si et seulement si* f *n'est pas minimalement rigide.*

Preuve. Supposons que $\star df$ ne soit pas exacte et soit f^* une autre immersion isométrique minimale de M dans E^3. A une congruence près nous pouvons supposer que f et f^* ont même application de Gauss. Alors nos hypothèses garantissent que l'angle α entre $df(p;\xi)$ et $df^*(p;\xi)$ est constant, indépendant de $p \in M$ et $\xi \in T_pM$. Comme $G = G^*$ nous savons que le vecteur $df^*(p;\xi)$ est dans le sous-espace $T_pf(T_pM)$ dont $(df(p;\xi), \star df(p;\xi))$ est une base orthonormée, si ξ est unitaire. Ainsi

$$df^*(p;\xi) = \cos\alpha\, df(p;\xi) + \sin\alpha \star df(p;\xi) \qquad \text{pour tout } p \in M \text{ et tout } \xi \in T_pM\,.$$

Plus brièvement nous écrivons

$$df^* = \cos\alpha\, df + \sin\alpha \star df\,.$$

Alors, α étant constant, nous pouvons écrire

$$d(f^* - \cos\alpha f) = \sin\alpha \star df\,.$$

En particulier si $\sin\alpha \neq 0$ la forme $\star df$ est nécessairement exacte. Donc, comme $\star df$ n'est pas exacte nous avons $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. En remplaçant éventuellement f par $-f$, ce qui ne change pas la classe de congruence, nous pouvons supposer $\alpha = 0$. Dans ce cas les deuxièmes formes fondamentales $II = -\langle dG, df\rangle$ et $II^* = -\langle dG^*, df^*\rangle$ coïncident en chaque point de M car $df = df^*$ et $dG = dG^*$. Par ailleurs les premières formes fondamentales coïncident puisque f et f^* sont des isométries. Ainsi dans ce cas f et f^* sont congruentes, de sorte que f est minimalement rigide.

Réciproquement si $\star df$ est exacte il existe une application $\phi: M \to E^3$ telle que $d\phi = \star df$. Pour chaque $\alpha \in \mathbf{R}$ nous pouvons considérer l'application

$$M \ni p \mapsto \cos\alpha f(p) + \sin\alpha\phi(p) = g_\alpha(p)\,.$$

Cette application est nécessairement une immersion isométrique minimale. En effet, c'est une immersion car $dg_\alpha(p;\xi) = df(p; \cos\alpha\xi + \sin\alpha(\star\xi))$ et ce dernier vecteur est unitaire pour tout vecteur unitaire $\xi \in T_pM$. Cette même égalité montre aussi que l'immersion g_α est une isométrie. Vérifions qu'elle est bien minimale. Or nous avons:

$$\star dg_\alpha = \cos\alpha d\phi - \sin\alpha df\,.$$

Il en résulte que $\star dg_\alpha$ est exacte et donc aussi fermée, ce qui est équivalent à dire que l'immersion isométrique g_α est minimale. Nous avons ainsi toute une famille à un paramètre d'immersions isométriques minimales contenant f. De plus toutes ces immersions ont même application de Gauss, par construction. Comme l'image de M par cette application de Gauss est d'intérieur non vide dans $\mathscr{S}^2$, les seules isométries de E^3, qui par composition avec f fournissent des isométries ayant même application de Gauss, sont les translations. Cela signifie que si les applications g_α étaient congruentes à f elles devraient l'être par des translations. Or ceci est certainement absurde puisque $df \neq dg_\alpha$. Ainsi f n'est pas minimalement rigide. □

Remarquons que la non exactitude de $\star df$ est équivalente à l'existence d'un chemin fermé γ, lisse par morceaux, tel que

$$\int_\gamma \star df \neq 0 .$$

Par ailleurs il est remarquable que parmi les immersions isométriques minimales, ce type de déformations soit le seul possible, à congruence près. Plus précisément nous avons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. *Soit M une surface orientée et $f: M \to E^3$ une immersion isométrique minimale. Supposons $\star df = d\phi$. Alors toute immersion isométrique minimale f^* de M dans E^3 s'écrit, à congruence près, sous la forme*

$$f^* = \cos\alpha f + \sin\alpha\phi$$

avec $\alpha \in [0, 2\pi[$

Preuve. Nous pouvons supposer M de courbure de Gauss non identiquement nulle. Alors le théorème 1 montre que

$$df^* = \cos\alpha\, df + \sin\alpha\, d\phi$$

avec $\alpha \in [0, 2\pi[$ constant. Il en résulte que $df^* = d(\cos\alpha f + \sin\alpha\phi)$. Ainsi, par connexité de M, les immersions f^* et $\cos\alpha f + \sin\alpha\phi$ diffèrent d'un vecteur constant dans E^3. D'où l'égalité cherchée, à congruence près. □

Soit M une surface non orientable et soit $\hat{M}$ son revêtement orientable à deux feuillets. Nous le munissons d'une orientation. Soit $\pi: \hat{M} \to M$ la projection de revêtement. Tout chemin $\gamma: [a, b] \to M$ admet un relèvement

$\hat{\gamma}: [a, b] \to \hat{M}$ c'est-à-dire un chemin tel que $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$. Nous avons alors le corollaire suivant qui se déduit de la proposition 3.

COROLLAIRE 3. *Soit* M *une surface non orientable avec courbure de Gauss non nulle dans un ouvert dense et* f, f^* *des immersions isométriques de* M *dans* E^3, *avec même application de Gauss. S'il existe un chemin fermé* γ *dans* M *tel que*

$$\int_{\hat{\gamma}} \star d(f \circ \pi) \neq 0$$

alors f *et* f^* *sont congruentes.*

Preuve. Les applications $h = f \circ \pi$ et $h^* = f^* \circ \pi$ sont des immersions isométriques de $\hat{M}$ dans E^3, avec même application de Gauss. Nos hypothèses impliquent que la courbure de Gauss de $\hat{M}$ est non nulle dans un ouvert dense. Nous en déduisons que l'angle entre $dh(p)$ et $dh^*(p)$ est indépendant de p. Notons le α. Soit $\gamma: [a, b] \to M$ un chemin fermé tel que

$$\int_{\hat{\gamma}} \star dh \neq 0 \quad \text{où } \hat{\gamma} \text{ est un relèvement de } \gamma .$$

Remarquons que $\hat{\gamma}$ n'est pas nécessairement fermé. Comme dans la démonstration du lemme fondamental nous avons:

$$\int_{\hat{\gamma}} dh^* = \cos \alpha \int_{\hat{\gamma}} dh + \sin \alpha \int_{\hat{\gamma}} \star dh ,$$

or

$$\int_{\hat{\gamma}} dh^* = h^*(\hat{\gamma}(b)) - h^*(\hat{\gamma}(a)) = f^*(\gamma(b)) - f^*(\gamma(a)) = 0 .$$

De même

$$\int_{\hat{\gamma}} dh = 0 \quad \text{et ainsi} \quad \sin \alpha \int_{\hat{\gamma}} \star dh = 0 .$$

Donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ et nous pouvons en déduire que les immersions h et h^* sont congruentes. Par surjectivité de π il en résulte que f et f^* diffèrent par une isométrie de E^3. □

THÉORÈME 2. *Soit* M *une surface non orientable et* f, f^* *des immersions isométriques minimales de* M *dans* E^3. *Alors* f *et* f^* *sont congruentes.*

Preuve. Comme M est non orientable, la courbure de Gauss de M n'est pas identiquement nulle. Par minimalité de l'immersion isométrique f il s'en suit que la courbure de Gauss est non nulle dans un ouvert dense. A congruence près nous pouvons supposer que f et f^* ont même application de Gauss.

Si f et f^* n'étaient pas congruentes, nous aurions la relation

$$\int_{\hat{\gamma}} \star d(f \circ \pi) = 0$$

pour tout chemin fermé γ dans M et tout relèvement $\hat{\gamma}$ de γ, dans le revêtement orienté à deux feuillets $\hat{M}$ de M. Comme auparavant nous avons noté $\pi : \hat{M} \to M$ la projection de revêtement. Posons $h = f \circ \pi$ et $h^* = f^* \circ \pi$. Alors la condition

$$\int_{\hat{\gamma}} \star dh = 0$$

implique que $\star dh = d\psi$ où $\psi : \hat{M} \to E^3$ est une application différentiable telle que $\psi(x) = \psi(x')$ pour tout $x, x' \in \hat{M}$ avec $\pi(x) = \pi(x')$. Nous en déduisons que $\psi = \phi \circ \pi$ où $\phi : M \to E^3$ est différentiable.

Considérons les éléments de E^3 comme des matrices diagonales d'ordre trois. Nous avons alors la 2-forme différentielle, à valeurs réelles,

$$\begin{aligned} &Tr(dh \wedge \star dh)\,(p; \xi, \eta) \\ &= Tr(dh(p;\xi)\,(\star dh(p;\eta)) - dh(p;\eta)\,(\star dh(p;\xi)))\,. \end{aligned}$$

C'est une 2-forme dans $\hat{M}$ qui égale $-2\omega_{\hat{M}}$, où $\omega_{\hat{M}}$ est la forme volume de $\hat{M}$. En particulier elle est partout non nulle. Mais elle est induite par π d'une 2-forme de M. En fait

$$Tr(dh \wedge \star dh) = \pi^{\#}\, Tr(df \wedge d\phi)\,.$$

Ainsi, par surjectivité de π, la 2-forme différentielle $Tr(df \wedge d\phi)$ est partout non nulle dans M. Or l'existence d'une telle forme est équivalente à l'orientabilité de M. Ceci est contraire à l'hypothèse. □

Revenons au cas d'une surface orientée M et d'une immersion isométrique minimale $f : M \to E^3$. Le théorème 1 montre qu'il est intéressant d'avoir des critères géométriques qui garantissent la non-exactitude de $\star df$. C'est ce que nous allons examiner brièvement.

CRITÈRE A. Pour chaque $z \in \mathscr{S}^2$ nous considérons la fonction hauteur $h_z : M \to \mathbf{R}$ définie par $M \ni p \mapsto h_z(p) = \langle f(p), z \rangle$, où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire dans E^3. Si la courbure de Gauss de M n'est pas identiquement nulle, ce que nous supposons pour la suite, l'image de h_z est un intervalle d'intérieur non vide. En particulier nous pouvons choisir une valeur régulière $c \in \mathbf{R}$ avec $h_z^{-1}(c)$ non vide. L'ensemble $N = h_z^{-1}(c)$ est alors une sous-variété de dimension 1 de M. Soit $p \in N$ et $\xi \in T_p N$ un vecteur unitaire. Alors

$$dh_z(p;\xi) = 0 = \langle df(p;\xi), z \rangle$$

et comme c est une valeur régulière, p n'est pas critique en sorte que $dh_z(p;\star\xi) \neq 0$.

Ainsi

$$\langle \star df(p;\xi), z \rangle \neq 0\, \forall p \in N \quad \text{et} \quad \xi \in T_p N\,,\ \xi \neq 0\,.$$

En particulier si N possède une composante connexe compacte, cette composante pourra être paramétrisée par un chemin fermé lisse $\gamma : [a,b] \to N \subset M$ et en vertu de ce qui précède $\langle \star df(\gamma(t);\gamma'(t)), z \rangle$ est non nul pour tout $t \in [a,b]$. Il en résulte que

$$\int_\gamma \star df \neq 0\,.$$

Nous en déduisons que $\star df$ n'est pas exacte et par suite, que f est minimalement rigide.

COROLLAIRE 4. *Une surface minimale complète dans* E^3, *qui est de type topologique fini et possède au moins deux bouts, est minimalement rigide.*

Preuve. Par un résultat de Collin [5], de telles surfaces sont de courbure totale finie. Or on sait que pour une surface minimale complète de courbure totale finie, l'application de Gauss converge lorsqu'on s'approche d'un bout [10]. Ces valeurs limites pour les différents bouts sont toutes colinéaires parce que la surface est plongée. Soit $z \in \mathscr{S}^2$ l'une de ces valeurs limites. Le comportement asymptotique des bouts montre que la fonction h_z converge ou tend vers l'infini lorsqu'on s'approche d'un bout (voir [11]). En choisissant une valeur régulière pour h_z, distincte d'une de ces valeurs limites, on obtient une image réciproque compacte et non vide. Le critère A ci-dessus établit alors la rigidité minimale de la surface. $\square$

CRITÈRE B. Avec les notations de la proposition 1, considérons cette fois la composée $\pi_z \circ f$. C'est une application 2-générique de M dans le plan E_z pour presque tout $z \in \mathscr{S}^2$ et en fait pour tout z si la courbure de Gauss de M est partout non nulle. Lorsque l'ensemble Σ_z des points singuliers de $\pi_z \circ f$ possède une composante connexe compacte et que $\gamma : [a, b] \to M$ est une paramétrisation d'une telle composante, nous considérons le partage

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$$

tel que les points $\gamma(t_i)$ sont les points de type cusp de la composante de Σ_z considérée. Notons ε_i le signe de la fonction

$$\rho(t) = < z \wedge G(\gamma(t)), df(\gamma(t); \gamma'(t)) > \qquad \text{pour } t \in]t_i, t_{i+1}[\, .$$

Alors l'intégrale $\int_\gamma < \star df, z >$ égale la somme alternée des longueurs $l(\pi_z \circ f \circ \gamma([t_i, t_{i+1}]))$. Nous appelons cette somme alternée la *longueur algébrique* de la composante $\pi_z \circ f \circ \gamma([a, b])$ du contour apparent. En particulier si cette longueur algébrique est non nulle, l'intégrale est non nulle et la forme $\star df$ n'est pas exacte. Il est ainsi possible, dans certains cas de voir la rigidité d'une immersion isométrique minimale $f : M \to E^3$ à partir d'une projection générique de $f(M)$.

Explication. Nous pouvons supposer le chemin γ lisse et en remplaçant éventuellement z par $-z$ que $\rho(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [a, t_1]$ et $t \in [t_n, b]$. Chaque fois que nous passons un point de type cusp la fonction ρ s'annule et change de signe. C'est-à-dire, $\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et en convenant que $\varepsilon_{n+1} = 1$. Cela résulte de la forme locale standard de la surface $f(M)$ au voisinage d'un point cuspidal. Par ailleurs nous savons que la forme différentielle $\star df$ est liée à df et à l'application de Gauss G de f par la relation: $\star df(p; \xi) = G(p) \wedge df(p; \xi)$. Il en résulte que

$$< \star df(p; \xi), z > = \det(G(p), df(p; \xi), z) = < z \wedge G(p), df(p; \xi) > \, .$$

Comme l'application π_z est linéaire nous avons

$$< \star df(p; \xi), z > = < z \wedge G(p), d(\pi_z \circ f)(p; \xi) > \, .$$

Lorsque $p = \gamma(t) \in \Sigma_z$ n'est pas un point cuspidal, le vecteur $z \wedge G(\gamma(t))$ est unitaire et tangent au contour apparent $\pi_z \circ f \circ \gamma([a, b])$ au point $\pi_z(f(\gamma(t)))$ et si $\xi = \gamma'(t)$ l'expression $< \star df(p; \xi), z >$ égale $\rho(t)$.

Mais le chemin $\pi_z \circ f \circ \gamma$ est précisément une paramétrisation d'une composante du contour apparent et par le choix de z nous pouvons affirmer que

$$< \star df(\gamma(t); \gamma'(t)), z> \;=\; \rho(t) = (-1)^i \, \| (\pi_z \circ f \circ \gamma)'(t) \| \qquad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \, .$$

Cette égalité reste vraie en un point cuspidal où les deux membres valent zéro. Par définition de la longueur algébrique de $\pi_z \circ f \circ \gamma$ nous avons alors

$$\int_\gamma \star df = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, l(\pi_z \circ f \circ \gamma \,|\, [t_i, t_{i+1}]) \, . \qquad \square$$

Observons que n est toujours pair et que par convention nous avons noté $l(\pi_z \circ f \circ \gamma \,|\, [t_n, t_{n+1}])$ la somme de longueurs $l(\pi_z \circ f \circ \gamma \,|\, [a, t_1]) + l(\pi_z \circ f \circ \gamma \,|\, [t_n, b])$.

De ces considérations il résulte immédiatement que si pour un $z \in \mathscr{S}^2$ avec $\pi_z \circ f$ générique, l'ensemble singulier Σ_z possède une composante connexe sans points cuspidaux, l'immersion f est minimalement rigide.

4. Exemples

Exemple 1. Non rigidité des caténoïdes.

Rappelons que les caténoïdes sont les seules surfaces de révolution minimales et complètes, voir Hildebrandt [8]. Ils sont obtenus par rotation d'une chaînette autour d'un axe. Si nous prenons pour axe de rotation l'axe des z, les caténoïdes sont tous engendrés par la rotation des chaînettes $x = a \operatorname{ch} \left(\frac{z - z_0}{a}\right)$ contenues dans le plan 0_{xz}. Chaque caténoïde peut, après translation, être paramétré par

$$X_a(s, u) = (a \operatorname{ch} u \cos s, a \operatorname{ch} u \sin s, au) \, .$$

Le changement de paramètre $(s, v) = (s, \operatorname{sh} u)$ définit une nouvelle paramétrisation

$$Y_a(s, v) = (a \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} v) \cos s, a \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} v) \sin s, a \operatorname{argsh} v)$$

et dans cette paramétrisation les coefficients de la première forme fondamentale sont $g_{11} = a^2(1 + v^2)$, $g_{12} = 0$ et $g_{22} = a^2$.

Construisons maintenant une surface réglée de E^3 isométrique et non congruente au caténoïde.