Annexe I

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

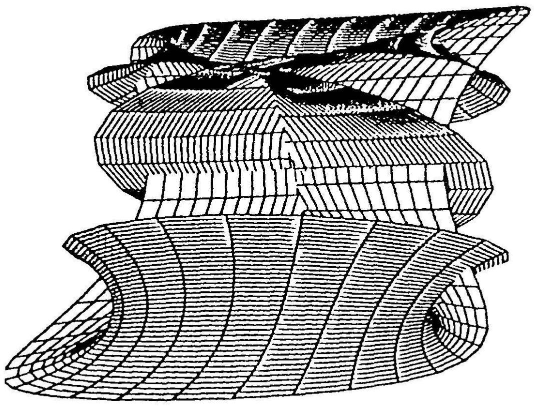

FIGURE 4

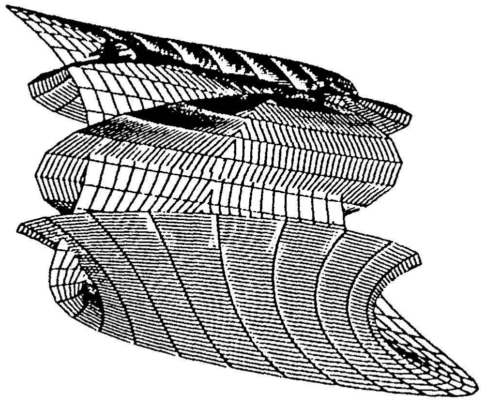

FIGURE 5

ANNEXE I

Nous allons démontrer ici la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soit M une surface orientée et f, f^* deux immersions isométriques dans E^3 dont les applications de Gauss coïncident. Si en chaque point $p \in M$ la courbure moyenne de f ou de f^* est non nulle, les deux immersions f et f^* sont congruentes.*

Preuve. Rappelons qu'en chaque point $p \in M$ nous avons les formes fondamentales suivantes, définies sur T_pM:

$$I_p(\xi, \eta) = \langle T_p f(\xi), T_p f(\eta) \rangle$$
$$II_p(\xi, \eta) = - \langle T_p G(\xi), T_p f(\eta) \rangle$$
$$III_p(\xi, \eta) = \langle T_p G(\xi), T_p G(\eta) \rangle$$

Rappelons brièvement que courbure moyenne et courbure de Gauss en p sont reliées à G et à f par les formules

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(T_p G \circ (T_p f)^{-1})$$
$$K(p) = \det(T_p G \circ (T_p f)^{-1}) .$$

L'application $T_p G \circ (T_p f)^{-1}$ est un endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel $G(p)^{\perp} = T_p f(T_p M), H(p)$ est la courbure moyenne de f en p et $K(p)$ sa courbure de Gauss en p. Les formes fondamentales de f en p vérifient l'identité

$$III_p(\xi, \eta) + 2H(p) II_p(\xi, \eta) + K(p) I_p(\xi, \eta) = 0 .$$

Notons $I_p^*, II_p^*, III_p^*, H^*, G^*, K^*$ les objets analogues définis pour f^*.

Comme f et f^* sont des immersions isométriques nous avons $I_p = I_p^*$ et $K = K^*$, et comme $G = G^*$ nous avons aussi $III_p = III_p^*$ pour tout $p \in M$. Les endomorphismes $A_p = T_pG \circ (T_pf)^{-1}$ et $A_p^* = T_pG^* \circ (T_pf^*)^{-1}$ sont auto-adjoints et sont donc représentés par des matrices symétriques dans une base orthonormée de $G(p)^{\perp}$. Nous pouvons écrire $A_p^* \circ R_p = A_p$ où $R_p = T_pf^* \circ (T_pf)^{-1}$ est une rotation, vu que f et f^* sont des isométries avec même application de Gauss. Soit θ_p son angle de rotation avec $-\pi < \theta_p \leqslant \pi$. Par symétrie de A et A^* nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^*R) = \mathrm{Tr}A^* \cos\theta = \mathrm{Tr}A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(AR^{-1}) = \mathrm{Tr}A\, cos\,\theta = \mathrm{Tr}A^*$$

D'où les formules

$$H^* \cos\theta = H \qquad \text{et} \qquad H\cos\theta = H^*$$

Nous en déduisons que $H^* = \cos^2(\theta)H^*$ et $H = \cos^2(\theta)H$, et avec nos hypothèses, H ou H^* non nuls en chaque point, nous pouvons conclure que $\theta_p = 0$ ou $\theta_p = \pi$, pour tout p. Par connexité de M la fonction $p \mapsto \theta_p$ est constante, égale à 0 ou π. En remplaçant éventuellement f^* par $-f^*$, ce qui ne change pas la classe de congruence de f^*, nous pouvons supposer $\theta_p = 0$ pour tout p. Ainsi $H = H^*$. Alors les identités entre les formes fondamentales et le fait que H soit partout non nulle, impliquent l'égalité des deuxièmes formes fondamentales $II = II^*$. Tenant compte du fait que $G = G^*$, la théorie locale des surfaces montre alors que $f^* = \tau \circ f$ où τ est une translation de E^3. En fait l'application $p \mapsto (f^*(p) - f(p))$ est localement constante donc constante par connexité de M. En d'autres termes f est congruente à f^*. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDROFF, A. Über eine Klasse geschlossener Flächen. *Recueil Math.* (devenu *Math. Sbornik 4* (1938), 69-77.

[2] DO CARMO, M.P. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[3] CHOI, H.I., W.H. MEEKS and B. WHITE. A rigidity theorem for properly embedded minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$. *J. Differential geometry, 32* (1990), 65-76.

[4] COHN-VOSSEN, S. Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. *Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen,* 1927, 125-134.

[5] COLLIN, P. Topologie et courbure des surfaces minimales de $\mathbf{R}^3$. Preprint 124 ENS Lyon 1994.

[6] CONNELLY, R. *Rigidity.* Handbook of Convex Geometry, Vol. A, North-Holland, Amsterdam 1993, pp. 223-271.