

4. Proof of the main results

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REMARK. We have so far excluded from our discussion curves of constant width $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{K}$ ($K > 0$). Although our methods do not apply to these curves, they are easily dealt with, being characterized as the Jordan curves γ which remain invariant under the isometry $g: S_K \rightarrow S_K$ given by $g(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. This map g exchanges the two regions bounded by γ in S_K (so these regions have the same area $\frac{2\pi}{K}$), and also exchanges the two arcs into which γ is divided by any pair of antipodal points (so these two arcs have the same length). Hence Theorem D is not valid in this case. If we consider (for small d) a parallel curve γ_d to γ then γ has constant width $\frac{\pi}{\sqrt{K}} - 2d$. Since γ has arbitrarily long perimeter and does not need to be convex, the same applies to γ_d (but the longer the perimeter of γ , the smaller d must be in order to ensure that γ_d has no self-intersections).

4. PROOF OF THE MAIN RESULTS

We have now gathered all the necessary tools, and the proofs of Theorem B and Corollary C are a simple matter.

Proof of Theorem B. We assume $K > 0$, the case $K < 0$ being similar. Using (14) we have

$$\mathcal{L} = f(\mathcal{L}) - f(0) = \int_0^{\mathcal{L}} f'(s) ds = \frac{\sin(\sqrt{K} \mathcal{W})}{\sqrt{K}} \int_0^{\mathcal{L}} k_g(s) ds - \mathcal{L} \cos(\sqrt{K} \mathcal{W}),$$

and therefore

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\sin(\sqrt{K} \mathcal{W})}{\sqrt{K} \{1 + \cos(\sqrt{K} \mathcal{W})\}} \int_0^{\mathcal{L}} k_g(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{K}} \tan\left(\frac{\sqrt{K} \mathcal{W}}{2}\right) \{2\pi - K \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

by the Gauss-Bonnet theorem. \square

Proof of Corollary C. First we treat the case $K > 0$. From Theorem B we see that $\mathcal{A} < \frac{2\pi}{K}$, which means that the region we are interested in has the smallest area of the two regions bounded by γ in S_K . We also assume

that $\mathcal{L} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$, otherwise \mathcal{L} is too large for γ to be a circle and the desired inequality holds trivially. Under these conditions inequality (1) is equivalent to

$$(17) \quad A \leq \frac{1}{K} \left\{ 2\pi - \sqrt{4\pi^2 - K \mathcal{L}^2} \right\}.$$

Combining Theorem B and (17) we obtain

$$\mathcal{L} \geq \frac{1}{\sqrt{K}} \tan\left(\frac{\sqrt{K} \mathcal{W}}{2}\right) \sqrt{4\pi^2 - K \mathcal{L}^2},$$

which is equivalent to

$$(18) \quad \mathcal{L} \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \sin\left(\frac{\sqrt{K} \mathcal{W}}{2}\right)$$

— and this is the inequality we want. If equality holds in (18) then it also holds in each of the equivalent inequalities (17) and (1) — and therefore γ is a circle.

The case $K < 0$ has a similar (and easier) treatment. We begin by rewriting (1) in the form

$$A \leq -\frac{1}{K} \left\{ \sqrt{4\pi^2 - K \mathcal{L}^2} - 2\pi \right\},$$

and then proceed as before. \square

REFERENCES

- [B] BARBIER, E. Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. *J. Math. Pures Appl.* (2) 5 (1860), 273–286.
- [Bl] BLASCHKE, W. Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen von konstanter Breite. *Ber. d. Verh. d. Sächs. Akad. Leipzig* 67 (1915), 290–297.
- [C] CADWELL, J.H. *Topics in Recreational Mathematics*. Cambridge University Press, 1966.
- [dC] DO CARMO, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall 1976.
- [E] EGGLESTON, H.G. *Convexity*. Cambridge University Press, 1958.
- [HS] HAMMER, P.C. and T.J. SMITH. Conditions equivalent to central symmetry of convex curves. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 60 (1964), 779–785.
- [O] OSSERMAN, R. Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *Amer. Math. Monthly* 86 (1979), 1–29.