4. A LA RECHERCHE DE FORMES EFFECTIVES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

PROPOSITION 3.11.8. *La conjecture* abc *implique que l'équation*

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > y > 1$ *et* $m > n > 3$.

La recherche de solutions pour l'équation ci-dessus est appelée problème de Goormaghtigh (voir [6], B25). Avec $n = 3, (x, y, m, n) = (2, 5, 5, 3)$, $(2, 90, 13, 3)$ sont les seules solutions connues.

PROPOSITION 3.11.9. *La conjecture* abc *implique que pour tout entier* $d \geqslant 1$, *l'équation*

$$x(x + d) \ldots (x + kd) = y^n$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > 0$, $k \geqslant 2$, $y > 0$ *et* $n \geqslant 2$.

Cette proposition montre le lien entre la conjecture abc et les progressions arithmétiques. P. Erdős et J.L. Selfridge ont montré en 1975 que l'équation ci-dessus n'a pas de solution dans le cas particulier $d = 1$ (voir [33] pour plus de détails).

4. A LA RECHERCHE DE FORMES EFFECTIVES

Soient a, b et c trois entiers positifs, premiers entre eux et vérifiant $a + b = c$. Soit $r = r(abc)$, le radical de abc. On définit le rapport de Oesterlé-Masser pour le triplet (a, b, c) par:

$$\alpha = \alpha(a, b, c) = \frac{\log c}{\log r}.$$

On définit de même le rapport de Szpiro pour le même triplet par:

$$\rho = \rho(a, b, c) = \frac{\log abc}{\log r}.$$

Ce dernier rapport est lié à la conjecture de Szpiro (voir conjecture 3.1.1) par les courbes elliptiques $E_{a,b,c}$ que Y. Hellegouarch [9] a mis au point en 1972 pour étudier le théorème de Fermat. C'est en utilisant ces mêmes courbes que K. Ribet a établit le lien entre la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil et le théorème de Fermat. Pour un triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$ et $(a, b) = 1$, la courbe $E_{a,b,c}$ est définie par:

$$E_{a,b,c}: y^2 = x(x - a)(x + b).$$

Si le triplet (a, b, c) vérifie, par exemple, $a \equiv 0 \pmod{16}$ et $b \equiv -1 \pmod 4$, alors $E_{a,b,c}$ est semi-stable et dans ce cas son équation minimale est donnée par:

$$y^2 + xy = x^3 + \frac{a-b-1}{4} x^2 - \frac{ab}{16} x .$$

Toujours avec les mêmes hypothèses, le discriminant minimal de la courbe $E_{a,b,c}$ est égal à $(abc/16)^2$ et la conjecture 3.1.1 donne donc la même conclusion que la conjecture abc:

Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $c(\varepsilon) > 0$ *telle que l'on ait:*

$$abc \leqslant c(\varepsilon) \, (r(abc))^{3+\varepsilon} .$$

L'inégalité de la conjecture abc implique que les rapports de Oesterlé-Masser et de Szpiro vérifient:

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \, \alpha(a, b, c) = 1 \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{r \to \infty}} \, \rho(a, b, c) = 3 .$$

Ceci implique en particulier qu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$, $(a, b) = 1$ et $\alpha(a, \mathrm{b}, c) > 1 + k$ ou $\rho(a, b, c) > 3 + k$, où $k > 0$ est fixé. On peut voir facilement que ceci devient faux pour $k \leqslant 0$. En effet, définissons les suites (x_n), (y_n) et (z_n) par $x_0 = 37$, $y_0 = 17$, $z_0 = 21$, et pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(x_n^3 + 2y_n^3), \\ y_{n+1} = -y^n(2x_n^3 + y_n^3), \\ z_{n+1} = z_n(x_n^3 - y_n^3) . \end{cases}$$

Alors pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_n^3 + y_n^3 = 6z_n^3, \qquad (x_n, y_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad z_n \equiv 0 \pmod{3 \times 2^n} .$$

Posons

$$a_n = \min(|x_n|^3, |y_n|^3, |6z_n^3|) ,$$
$$c_n = \max(|x_n|^3, |y_n|^3, |6z_n^3|) \qquad \text{et} \qquad b_n = c_n - a_n .$$

Alors pour $n \geqslant 1$,

$$r(a_n b_n c_n) = r\left(6 \frac{|x_n y_n z_n|^3}{2^{3n}}\right) < (a_n b_n c_n)^{1/3} < c_n ,$$

et donc $\alpha(a_n, b_n, c_n) > 1$ et $\rho(a_n, b_n, c_n) > 3$.

On peut se poser maintenant naturellement la question s'il existe un triplet pour lequel l'un des deux rapports α ou ρ est maximal. Nous avons en fait la réponse suivante.

PROPOSITION 4.1. *La conjecture* abc *implique qu'il existe un triplet d'entiers positifs* (a, b, c) *vérifiant* $(a, b) = 1$ *et* $a + b = c$, *pour lequel le rapport* $\alpha(a, b, c)$ *(resp.* $\rho(a, b, c)$*) est maximal.*

Preuve. Admettons la conjecture abc. Supposons qu'il n'existe pas de triplet (a, b, c) admettant un rapport α maximal. Soit (a_0, b_0, c_0) un triplet d'entiers positifs vérifiant $(a_0, b_0) = 1$ et $a_0 + b_0 = c_0$, avec $\alpha(a_0, b_0, c_0) > 1$. On peut donc construire une infinité de relations (a_n, b_n, c_n) telles que pour tout $n \geqslant 1$, $\alpha(a_n, b_n, c_n) > \alpha(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})$. D'autre part, la conjecture abc implique que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive $c(\varepsilon)$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, on ait:

$$\alpha(a_n, b_n, c_n) \leqslant 1 + \varepsilon + \frac{c(\varepsilon)}{\log r(a_n b_n c_n)} .$$

Choisissons ε tel que $1 + \varepsilon < \alpha(a_0, b_0, c_0)$. Comme les triplets (a_n, b_n, c_n) sont différents deux à deux, alors d'après le théorème de Mahler (voir [26]), $\lim_{n \to \infty} r(a_n b_n c_n) = \infty$ et donc:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(a_n, b_n, c_n) \leqslant 1 + \varepsilon < \alpha(a_0, b_0, c_0) ,$$

ce qui contredit la définition de la suite. $\square$

Les triplets (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$, $(a, b) = 1$ pour lesquels les rapports $\alpha(a, b, c)$ ou $\rho(a, b, c)$ sont proches des valeurs conjecturales 1 et 3 sont nombreux. Nous convenons de dire qu'un triplet (a, b, c) est *bon* pour la conjecture abc si $\alpha(a, b, c) > 1.4$ ou si $\rho(a, b, c) > 3.8$. Dans la suite, on se propose de décrire une méthode de recherche de bons triplets pour la conjecture abc. Cette méthode est basée sur la résolution de l'équation diophantienne:

$$Ax^n - By^n = Cz \tag{4.2}$$

en entiers x, y, z où les entiers A, B, C et n sont donnés et vérifient $A > 0$, $B \neq 0$, $C > 0$, $n \geqslant 2$ et $(A, B) = 1$. Pour chaque solution (x, y, z) de (4.2), nous prenons les entiers a, b et c parmi Ax^n, By^n et Cz de telle sorte que le triplet (a, b, c) vérifie $0 < a < b$, $a + b = c$ et $(a, b) = 1$. On calcule enfin les rapports $\alpha(a, b, c)$ et $\rho(a, b, c)$ en espérant qu'ils soient bons pour la conjecture *abc*. Pour cela, on doit bien choisir les données A, B et C et on cherche les solutions de (4.2) dans lesquelles $|z|$ est petit par rapport à C. La description détaillée de cette méthode se trouve dans [15, 16, 17].

Nous avons ainsi déterminé 86 exemples de triplets (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c, (a, b) = 1$ et $\alpha(a, b, c) \geqslant 1.4$ et 103 autres exemples vérifiant $\rho(a, b, c) \geqslant 3.8$. Nous listons dans les tables 4.3 et 4.4

TABLE 4.3

N.	*a*	*b*	*c*	α	Auteur
1.	2	$3^{10}.109$	23^5	1.62991	Reyssat (1987)
2.	11^2	$3^2.5^6.7^3$	$2^{21}.23$	1.62599	de Weger (1987)
3.	19.1307	$7.29^2.31^8$	$2^8.3^{22}.5^4$	1.62349	B-B (1992)
4.	283	$5^{11}.13^2$	$2^8.3^8.17^3$	1.58076	B-B, Nitaj (1992)
5.	1	2.3^7	$5^4.7$	1.56789	de Weger (1987)
6.	7^3	3^{10}	$2^{11}.29$	1.54708	de Weger (1987)
7.	$7^2.41^2.311^3$	$11^{16}.13^2.79$	$2.3^3.5^{23}.953$	1.54443	Nitaj (1994)
8.	5^3	$2^9.3^{17}.13^2$	$11^5.17.31^3.137$	1.53671	te Riele-Montgomery (1994)
9.	13.19^6	$2^{30}.5$	$3^{13}.11^2.31$	1.52700	Nitaj (1992)
10.	$3^{18}.23.2269$	$17^3.29.31^8$	$2^{10}.5^2.7^{15}$	1.52216	Nitaj (1994)
11.	239	$5^8.17^3$	$2^{10}.37^4$	1.50284	B-B, Nitaj (1992)

TABLE 4.4

N.	*a*	*b*	*c*	ρ	Auteur
1.	13.19^6	$2^{30}.5$	$3^{13}.11^2.31$	4.41901	Nitaj (1992)
2.	$2^5.11^2.19^9$	$5^{15}.37^2.47$	$3^7.7^{11}.743$	4.26801	Nitaj (1994)
3.	$2^{19}.13.103$	7^{11}	$3^{11}.5^3.11^2$	4.24789	de Weger (1987)
4.	$2^{35}.7^2.17^2.19$	$3^{27}.107^2$	$5^{15}.37^2.2311$	4.23069	Nitaj (1994)
5.	$3^{18}.23.2269$	$17^3.29.31^8$	$2^{10}.5^2.7^{15}$	4.22979	Nitaj (1994)
6.	$17^4.79^3.211$	$2^{29}.23.29^2$	5^{19}	4.22960	Nitaj (1994)
7.	$5^{14}.19$	$2^5.3.7^{13}$	$11^7.37^2.353$	4.22532	Nitaj (1994)
8.	3^{21}	$7^2.11^6.199$	$2.13^8.17$	4.20094	Nitaj (1992)
9.	$5^{18}.6359$	$3^2.47^6.73^3$	$2^7.19^{10}.79$	4.14883	Nitaj (1994)
10.	$11^3.31^5.101.479$	107^8	$2^{31}.3^4.5^6.7$	4.13000	Nitaj (1994)
11.	$7.11^6.43$	$3^{11}.5^4$	$2^{17}.17^3$	4.10757	G. Xiao (1986)

les 11 meilleurs triplets connus actuellement relativement au rapport α et au rapport ρ. L'auteur peut fournir, sur demande, la totalité des triplets dont il dispose. Certains exemples ont été déterminés en même temps par une méthode différente par J. Browkin et J. Brzeziński et sont notés B-B (voir [2]). De manière exhaustive, N. Elkies et J. Kanapka ont déterminé tous les triplets d'entiers positifs (a, b, c) vérifiant $a + b = c \leqslant 2^{32}$, $(a, b) = 1$ et $\alpha(a, b, c) \geqslant 1.2$ (communication privée). Récemment, H. te Riele et P. Montgomery ont déterminé 5 nouveaux exemples en utilisant l'algorithme LLL de Lenstra, Lenstra et Lovász (communication privée). D'autre part, nous avons continué la recherche de bons exemples pour la conjecture *abc* avec une méthode basée sur les approximations p-adiques. Cette méthode a permis de découvrir 21 nouveaux exemples avec $\alpha > 1.4$ et 20 autres avec $\rho > 4.0$.

Les tables 4.3 et 4.4 nous permettent de donner la forme effective suivante de la conjecture *abc*:

CONJECTURE 4.5. *Si* (a, b, c) *est un triplet d'entiers positifs vérifiant* $a + b = c$ *et* $(a, b) = 1$, *alors* $c < r(abc)^{1.63}$ *et* $abc < r(abc)^{4.42}$.

Cette conjecture est bien entendu plus faible que la conjecture *abc*. Elle permet de déterminer des bornes explicites pour les solutions de certaines équations diophantiennes. A titre d'exemple, elle implique le théorème de Fermat pour les exposants $n \geqslant 5$.

La recherche d'une formule de la constante $c(\varepsilon)$ de la conjecture *abc* en fonction de ε est un problème différent. Il faut tenir compte du fait que $\lim_{\varepsilon \to \infty} c(\varepsilon) = +\infty$, (Proposition 2.4) et du théorème suivant, démontré dans [13] et [29]:

THÉORÈME 4.6. *Soit* $\delta > 0$. *Il existe une infinité de triplets* (a, b, c) *d'entiers positifs vérifiant* $a + b = c$, $(a, b) = 1$ *et tels que*

$$c > r(abc) \exp\left((4 - \delta)\frac{\sqrt{\log r(abc)}}{\log\log r(abc)}\right).$$

Ce théorème admet la conséquence suivante:

PROPOSITION 4.7. *Pour tout* $k > 0$ *et tout* $k_1 > 0$, *il existe un triplet* (a, b, c) *d'entiers positifs vérifiant* $a + b = c$, $(a, b) = 1$ *et tels que* $c > kr(abc)\,(\log r(abc))^{k_1}$.

Preuve. Soient $k > 0$ et $k_1 > 0$. Supposons que tous les triplets (a, b, c) d'entiers positifs avec $a + b = c$ et $(a, b) = 1$ vérifient $c \leqslant kr(abc)\,(\log r(abc))^{k_1}$. Soit (a, b, c) un triplet vérifiant l'inégalité du théorème (4.6). Alors:

$$r(abc) \exp\left((4-\delta)\,\frac{\sqrt{\log r(abc)}}{\log\log r(abc)}\right) < c \leqslant kr(abc)\,(\log r(abc))^{k_1}\,,$$

ce qui donne:

$$(4-\delta)\sqrt{\log r(abc)} < (\log k + k_1 \log\log r(abc)) \log\log r(abc)\,,$$

et donc $r(abc)$ est borné, ce qui est impossible par le théorème (4.6) et par le théorème de Mahler. □

La proposition 4.7 nous donne maintenant le résultat suivant:

PROPOSITION 4.8. *Pour tout* $k > 0$, *il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et un triplet* (a, b, c) *d'entiers positifs, vérifiant* $a + b = c$ *et* $(a, b) = 1$, *tels que*

$$c > \frac{1}{\varepsilon^k}\,(r(abc))^{1+\varepsilon}\,.$$

Preuve. Soit $k > 0$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, et tout triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c, (a, b) = 1$ on ait:

$$c \leqslant \frac{1}{\varepsilon^k}\,(r(abc))^{1+\varepsilon}\,.$$

Le minimum du second membre de cette inégalité est atteint pour $\varepsilon = k/\log r(abc)$. Alors, on doit avoir:

$$c \leqslant \left(\frac{e}{k}\right)^k r(abc)\,(\log r(abc))^k\,,$$

ce qui contredit la proposition 4.7. □

5. GÉNÉRALISATIONS

La conjecture *abc* est aussi simple par son énoncé que le théorème de Fermat, mais certainement beaucoup plus difficile, et en tout cas sa résolution aura beaucoup de conséquences en théorie des nombres. L'intérêt de cette