L'Enseignement Mathématique, t. 42 (1996), p. 97-123

MOYENNES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE DIVISEURS D'UN ENTIER

par Jean-Marie DE KONINCK et Jacques GRAH[1])

ABSTRACT. Given an arithmetical function f, we examine the average value of $f(d)$ as d runs through subsets of the divisors d of an integer n. In particular, we study the functions $\bar{f}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ squarefree}}} f(d)$ and $\tilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)$, where $\tau(n)$ is the number of divisors of n and $\omega(n)$ stands for the number of distinct prime factors of n, and show that their arithmetic properties resemble those of f.

1. INTRODUCTION

Soit $\mathbf{F}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques. On dit que $f \in \mathbf{F}$ est *additive* si $f(mn) = f(m) + f(n)$ lorsque $(m, n) = 1$. Si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_r^{\alpha_r}$ est la décomposition canonique de n, alors les fonctions $\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1 = r$, $\Omega(n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ et $\log n$ sont additives. Lorsque l'égalité $f(mn) = f(m) + f(n)$ est valable pour tous les entiers positifs m et n, on dit que f est *totalement additive.* Si en plus d'être additive, f satisfait $f(p^\alpha) = f(p)$ pour chaque nombre premier p et tout $\alpha \in \mathbf{N}$, on qualifie f de *fortement additive.*

Une fonction $f \in \mathbf{F}$ est dite *multiplicative* si $f(mn) = f(m) f(n)$ lorsque $(m, n) = 1$. C'est le cas des fonctions $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, $\tau(n) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$, $\phi(n) = \sum_{\substack{m \leqslant n \\ (m,n)=1}} 1$, $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$, $1(n) = 1 \; \forall n \geqslant 1$, $\delta(n) = q_1 q_2 \dots q_r$ (qu'on

[1]) Travail supporté en partie par une subvention du CRSNG et une subvention du programme FCAR. 1991 Mathematics Subject Classification: 11A25, 11N37.