# 4. Mesure de l'écart entre f et les moyennes $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

EXEMPLE. Si $f(n) = \log \tau(n)$ et $m = 1$, alors

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \bar{f}(n) = \frac{\log 2}{2} \log \log x + \frac{\log 2}{2} C$$
$$+ \sum_{r \geqslant 2} \sum_{p} \frac{1}{r(r+1)p^r} \log \left( \frac{(r+1)^r}{r!} \right) + O(1/\log x) .$$

## 4. MESURE DE L'ÉCART ENTRE $f$ ET LES MOYENNES $\bar{f}$, $\hat{f}$ ET $\tilde{f}$

Nous allons étudier le moment d'ordre deux (selon le sens des définitions des moyennes $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$) de l'écart entre $\bar{f}(n)$, $\hat{f}(n)$ et $\tilde{f}(n)$ et les valeurs de $f$ sur les diviseurs de $n$.

Etant donné une fonction arithmétique $f$, on lui associe les trois opérateurs

$$\bar{\Delta} f(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} (f(d) - \bar{f}(n))^2 ,$$

$$\hat{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d)\,(f(d) - \hat{f}(n))^2,$$

$$\tilde{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} (f(d) - \tilde{f}(n))^2 .$$

Ainsi on remarque que

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} f(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} \{f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2\bar{f}(n) f(d)\} \\ &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2\,\frac{\bar{f}(n)}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d) \\ &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 \end{aligned}$$

et donc que

$$\bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 = \overline{f^2}(n) - \bar{f}(n)^2, \tag{4.1}$$

$$\hat{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d) f(d)^2 - \hat{f}(n)^2 = \widehat{f^2}(n) - \hat{f}(n)^2, \tag{4.2}$$

$$\tilde{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)^2 - \tilde{f}(n)^2 = \widetilde{f^2}(n) - \tilde{f}(n)^2. \tag{4.3}$$

Le prochain résultat montre que tout comme $\bar{T}$, $\hat{T}$ et $\tilde{T}$, les opérateurs $\bar{\Delta}$, $\hat{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}$ préservent l'additivité. Alors qu'il est facile de vérifier qu'aucun de ces trois opérateurs ne préserve la multiplicativité, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. *Si* $f \in \mathscr{A}$ *alors* $\bar{\Delta} f$, $\hat{\Delta} f$ *et* $\tilde{\Delta} f$ *appartiennent aussi à* $\mathscr{A}$, *et en particulier on a*

$$(4.4)\quad \bar{\Delta} f(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{1}{1+\alpha} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)^2 - \sum_{p^\alpha \| n} \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left( \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m) \right)^2 ,$$

$$(4.5)\quad \hat{\Delta} f(n) = \frac{1}{4} \sum_{p \mid n} f(p)^2 \in \mathscr{F}\mathscr{A},$$

$$(4.6)\quad \tilde{\Delta} f(n) = \frac{1}{4} \sum_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha)^2 .$$

*Démonstration.* Nous allons faire la preuve uniquement pour $\bar{\Delta}$, les autres relations se démontrant de manière analogue. Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels relativement premiers et $f$ une fonction quelconque choisie dans $\mathscr{A}$, alors

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} f(nm) &= \frac{1}{\tau(nm)} \sum_{d \mid nm} f(d)^2 - \bar{f}(nm)^2 \\ &= \frac{1}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \mid m}} \{f(d_1) + f(d_2)\}^2 - (\bar{f}(n) + \bar{f}(m))^2 \\ &= \bar{\Delta} f(n) + \bar{\Delta} f(m) - 2\bar{f}(n)\bar{f}(m) + \frac{2}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \mid m}} f(d_1) f(d_2). \end{aligned}$$

C'est pourquoi le résultat suit de l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \mid m}} f(d_1) f(d_2) &= \left( \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d_1 \mid n} f(d_1) \right) \left( \frac{1}{\tau(m)} \sum_{d_2 \mid m} f(d_2) \right) \\ &= \bar{f}(n) \bar{f}(m) . \end{aligned}$$

Et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 4.2. *Si* $f \in \mathscr{C}\mathscr{A}$, *alors* $\bar{\Delta} f(n) = \dfrac{1}{12} \displaystyle\sum_{p^\alpha \| n} \alpha(\alpha+2) f(p)^2$ $\geqslant \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{p \mid n} f(p)^2 = \hat{\Delta} f(n)$ *et* $\bar{\Delta} f \geqslant \hat{\Delta} f$. *Par ailleurs, si* $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, *alors* $\tilde{\Delta} f = \hat{\Delta} f$ *et de plus*

$$\frac{1}{4} \sum_{p^\alpha \| n} \frac{1}{\alpha} f(p)^2 \leqslant \bar{\Delta} f(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} f(p)^2 \leqslant \hat{\Delta} f(n) .$$

REMARQUES

1) Il découle du corollaire 4.2 que si $f$ est totalement additive, l'écart entre $f(n)$ et $\hat{f}(n)$ est plus petit qu'entre $f(n)$ et $\bar{f}(n)$, alors que si $f$ est fortement additive, c'est le contraire qui se produit.

2) A partir des définitions de $\bar{\Delta} f$, $\hat{\Delta} f$, $\tilde{\Delta} f$ et des égalités (4.1), (4.2) et (4.3), il est intéressant de souligner que, pour toute fonction arithmétique $f$, on a les inégalités $\overline{f^2} \geqslant \bar{f}^2$, $\tilde{f^2} \geqslant \tilde{f}^2$ et $\hat{f^2} \geqslant \hat{f}^2$, et qu'en particulier sur les entiers libres de carrés, on a $\bar{\Delta} f(n) = \hat{\Delta} f(n) = \tilde{\Delta} f(n)$.

## 5. GÉNÉRALISATIONS ET EXEMPLES

Les fonctions $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$ définies par les égalités (1.3), représentent essentiellement trois moyennes de $f$ évaluées respectivement sur les diviseurs, les diviseurs libres de carrés et les diviseurs unitaires d'un entier. Nous allons maintenant montrer comment certaines propriétés satisfaites par ces trois fonctions demeurent valables lorsque les moyennes sont évaluées sur d'autres classes de diviseurs d'un entier.

Etant donné un entier naturel $n$, on désigne par $D_n$ l'ensemble des diviseurs (positifs) de $n$. Soit alors $A$ une famille d'ensembles $A_n$ tels que $A_n \subset D_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Par exemple, en désignant par $I_n$ l'ensemble des diviseurs impairs de l'entier positif $n$, la famille $A$ constituée de tous les ensembles $I_n$ est un exemple typique.

Etant donné une famille $A := \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$, alors à chaque ensemble $A_n$, on associe son cardinal soit la fonction $\tau_A(n)$ définie par

$$\tau_A(n) := \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in A_n}} 1$$

qu'on peut aussi écrire $(1 *_A 1)(n)$, avec $*_A$ pour signifier que seuls les diviseurs $d$ de $n$ qui appartiennent à $A_n$ sont pris en considération. Nous nous intéressons ici aux familles pour lesquelles les ensembles $A_n$ possèdent une fonction $\tau_A$ multiplicative et jamais nulle.

EXEMPLES. Soit $k \in \mathbf{N}$ et $2 \leqslant y \in \mathbf{R}$. Définissons de plus $P(1) = 1$ et $P(n) = \max\{p : p \mid n\}$. Alors les ensembles

$$\begin{aligned}
A_n(k) &= \{d : d \mid n \text{ et } d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, 0 \leqslant \alpha_i < k\} \\
&= \{d : d \mid n \text{ et } d \text{ est } k\text{-libre}\}, k \geqslant 2, \\
B_n(y) &= \{d : d \mid n \text{ et } P(d) \leqslant y\}, \\
E_n(k) &= \left\{d : d^k \mid n \text{ et } \left(d^k, \frac{n}{d^k}\right) = 1\right\}
\end{aligned}$$