

4. Mesure de l'écart entre f et les moyennes \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f}

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

EXEMPLE. Si $f(n) = \log \tau(n)$ et $m = 1$, alors

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) = \frac{\log 2}{2} \log \log x + \frac{\log 2}{2} C$$

$$+ \sum_{r \geq 2} \sum_p \frac{1}{r(r+1)p^r} \log \left(\frac{(r+1)^r}{r!} \right) + O(1/\log x).$$

4. MESURE DE L'ÉCART ENTRE f ET LES MOYENNES \bar{f} , \hat{f} ET \tilde{f}

Nous allons étudier le moment d'ordre deux (selon le sens des définitions des moyennes \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f}) de l'écart entre $\bar{f}(n)$, $\hat{f}(n)$ et $\tilde{f}(n)$ et les valeurs de f sur les diviseurs de n .

Etant donné une fonction arithmétique f , on lui associe les trois opérateurs

$$\bar{\Delta} f(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} (f(d) - \bar{f}(n))^2,$$

$$\hat{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) (f(d) - \hat{f}(n))^2,$$

$$\tilde{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} (f(d) - \tilde{f}(n))^2.$$

Ainsi on remarque que

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} f(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \{f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2\bar{f}(n)f(d)\} \\ &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2 \frac{\bar{f}(n)}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d) \\ &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 \end{aligned}$$

et donc que

$$(4.1) \quad \bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 = \overline{f^2}(n) - \bar{f}(n)^2,$$

$$(4.2) \quad \hat{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) f(d)^2 - \hat{f}(n)^2 = \hat{f}^2(n) - \hat{f}(n)^2,$$

$$(4.3) \quad \tilde{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)^2 - \tilde{f}(n)^2 = \tilde{f}^2(n) - \tilde{f}(n)^2.$$

Le prochain résultat montre que tout comme \bar{T} , \hat{T} et \tilde{T} , les opérateurs $\bar{\Delta}$, $\hat{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}$ préservent l'additivité. Alors qu'il est facile de vérifier qu'aucun de ces trois opérateurs ne préserve la multiplicativité, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. *Si $f \in \mathcal{A}$ alors $\bar{\Delta}f$, $\hat{\Delta}f$ et $\tilde{\Delta}f$ appartiennent aussi à \mathcal{A} , et en particulier on a*

$$(4.4) \quad \bar{\Delta}f(n) = \sum_{p^\alpha \parallel n} \frac{1}{1+\alpha} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)^2 - \sum_{p^\alpha \parallel n} \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m) \right)^2,$$

$$(4.5) \quad \hat{\Delta}f(n) = \frac{1}{4} \sum_{p|n} f(p)^2 \in \mathcal{FA},$$

$$(4.6) \quad \tilde{\Delta}f(n) = \frac{1}{4} \sum_{p^\alpha \parallel n} f(p^\alpha)^2.$$

Démonstration. Nous allons faire la preuve uniquement pour $\bar{\Delta}$, les autres relations se démontrant de manière analogue. Soient m et n deux entiers naturels relativement premiers et f une fonction quelconque choisie dans \mathcal{A} , alors

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}f(nm) &= \frac{1}{\tau(nm)} \sum_{d|nm} f(d)^2 - \bar{f}(nm)^2 \\ &= \frac{1}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} \{f(d_1) + f(d_2)\}^2 - (\bar{f}(n) + \bar{f}(m))^2 \\ &= \bar{\Delta}f(n) + \bar{\Delta}f(m) - 2\bar{f}(n)\bar{f}(m) + \frac{2}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1)f(d_2). \end{aligned}$$

C'est pourquoi le résultat suit de l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1)f(d_2) &= \left(\frac{1}{\tau(n)} \sum_{d_1|n} f(d_1) \right) \left(\frac{1}{\tau(m)} \sum_{d_2|m} f(d_2) \right) \\ &= \bar{f}(n)\bar{f}(m). \end{aligned}$$

Et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 4.2. *Si $f \in \mathcal{CA}$, alors $\bar{\Delta}f(n) = \frac{1}{12} \sum_{p^\alpha \parallel n} \alpha(\alpha+2)f(p)^2$*

$\geq \frac{1}{4} \sum_{p|n} f(p)^2 = \hat{\Delta}f(n)$ et $\tilde{\Delta}f \geq \hat{\Delta}f$. Par ailleurs, si $f \in \mathcal{FA}$, alors $\tilde{\Delta}f = \hat{\Delta}f$ et de plus

$$\frac{1}{4} \sum_{p^\alpha \parallel n} \frac{1}{\alpha} f(p)^2 \leq \bar{\Delta}f(n) = \sum_{p^\alpha \parallel n} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} f(p)^2 \leq \hat{\Delta}f(n).$$

REMARQUES

1) Il découle du corollaire 4.2 que si f est totalement additive, l'écart entre $f(n)$ et $\hat{f}(n)$ est plus petit qu'entre $f(n)$ et $\bar{f}(n)$, alors que si f est fortement additive, c'est le contraire qui se produit.

2) A partir des définitions de $\bar{\Delta}f$, $\hat{\Delta}f$, $\tilde{\Delta}f$ et des égalités (4.1), (4.2) et (4.3), il est intéressant de souligner que, pour toute fonction arithmétique f , on a les inégalités $\overline{f^2} \geq \bar{f}^2$, $\tilde{f}^2 \geq \tilde{f}^2$ et $\hat{f}^2 \geq \hat{f}^2$, et qu'en particulier sur les entiers libres de carrés, on a $\bar{\Delta}f(n) = \hat{\Delta}f(n) = \tilde{\Delta}f(n)$.

5. GÉNÉRALISATIONS ET EXEMPLES

Les fonctions \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} définies par les égalités (1.3), représentent essentiellement trois moyennes de f évaluées respectivement sur les diviseurs, les diviseurs libres de carrés et les diviseurs unitaires d'un entier. Nous allons maintenant montrer comment certaines propriétés satisfaites par ces trois fonctions demeurent valables lorsque les moyennes sont évaluées sur d'autres classes de diviseurs d'un entier.

Etant donné un entier naturel n , on désigne par D_n l'ensemble des diviseurs (positifs) de n . Soit alors A une famille d'ensembles A_n tels que $A_n \subset D_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Par exemple, en désignant par I_n l'ensemble des diviseurs impairs de l'entier positif n , la famille A constituée de tous les ensembles I_n est un exemple typique.

Etant donné une famille $A := \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$, alors à chaque ensemble A_n , on associe son cardinal soit la fonction $\tau_A(n)$ définie par

$$\tau_A(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d \in A_n}} 1$$

qu'on peut aussi écrire $(1 *_A 1)(n)$, avec $*_A$ pour signifier que seuls les diviseurs d de n qui appartiennent à A_n sont pris en considération. Nous nous intéressons ici aux familles pour lesquelles les ensembles A_n possèdent une fonction τ_A multiplicative et jamais nulle.

EXEMPLES. Soit $k \in \mathbf{N}$ et $2 \leq y \in \mathbf{R}$. Définissons de plus $P(1) = 1$ et $P(n) = \max\{p : p | n\}$. Alors les ensembles

$$\begin{aligned} A_n(k) &= \{d : d | n \text{ et } d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, 0 \leq \alpha_i < k\} \\ &= \{d : d | n \text{ et } d \text{ est } k\text{-libre}\}, k \geq 2, \end{aligned}$$

$$B_n(y) = \{d : d | n \text{ et } P(d) \leq y\},$$

$$E_n(k) = \left\{ d : d^k | n \text{ et } \left(d^k, \frac{n}{d^k} \right) = 1 \right\}$$