Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 42 (1996)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan
Autor: Mathéus, Frédéric
Kapitel: II. Le Théorème de Rodin-Sullivan : ÉNONCÉ ET SCHÉMA DE LA PREUVE
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87874

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II. Le Théorème de Rodin-Sullivan: énoncé et schéma de la preuve

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert simplement connexe borné de $\mathbf{C}$ et z_0, z_1 deux points de $\mathcal{U}$. Notons $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathbf{C})$ la triangulation de $\mathbf{C}$ par des triangles équilatéraux de côté 2ε dont l'ensemble des sommets est $z_0 + 2\varepsilon\mathbf{Z} + 2\varepsilon e^{i\pi/3}\mathbf{Z}$, et $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U})$ l'ensemble des triangles de $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathbf{C})$ contenus dans $\mathcal{U}$. Notons $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ la composante connexe de la triangulation $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U})$ contenant z_0. Si $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ est disconnectée par la suppression de certains sommets, on supprime toutes les composantes ne contenant pas z_0 ainsi obtenues. La sous-triangulation de $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ fournie par ce procédé[1]), notée $\mathcal{T}_\varepsilon$, est une triangulation d'un disque topologique. On note $\mathcal{H}_\varepsilon$ l'ensemble des cercles du plan de rayon ε et centrés sur les sommets de $\mathcal{T}_\varepsilon$. On observera que les cercles de $\mathcal{H}_\varepsilon$ ne sont pas forcément contenus dans $\mathcal{U}$.

Koebe ([Ko]) puis Andreev ([An]) et Thurston ([Th1], [Ma-R]) ont démontré qu'il existe alors une famille $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ de cercles bordant des disques d'intérieurs deux à deux disjoints, contenus dans le disque unité $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$, et vérifiant:

i) $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ est en bijection avec $\mathcal{H}_\varepsilon$;

ii) deux cercles de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ sont tangents si et seulement si les cercles correspondants dans $\mathcal{H}_\varepsilon$ le sont;

iii) les cercles de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ correspondants aux cercles du bord de $\mathcal{H}_\varepsilon$ sont tangents au cercle unité.

Une telle famille (cf. fig. 1) s'appelle un empilement de cercles d'Andreev de combinatoire $\mathcal{T}_\varepsilon^1$ où $\mathcal{T}_\varepsilon^1$ désigne le 1-squelette de $\mathcal{T}_\varepsilon$. Elle est unique à transformation de Möbius près. Elle sera donc parfaitement déterminée si on demande que soit vérifiée une condition de normalisation que nous formulons ci-après.

Soit f_ε l'application définie de la manière suivante:

— si z est le centre d'un cercle de $\mathcal{H}_\varepsilon$, alors $f_\varepsilon(z)$ est le centre du cercle correspondant de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$;

— on prolonge f_ε à chaque triangle de $\mathcal{T}_\varepsilon$ en une application affine.

La condition de normalisation est alors:

iv) $f_\varepsilon(z_0) = 0$ et $f_\varepsilon(z_1) > 0$.

---

[1]) Voici une autre façon de la définir: on ne conserve que les triangles T de $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ pour lesquels il existe une suite de triangles de $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ telle que chacun ait une arête commune avec le suivant, et reliant T à un triangle contenant z_0.

Enfin, notons $f: \mathcal{U} \to \mathring{\mathbf{D}}$ l'uniformisation de Riemann de $\mathcal{U}$ normalisée par $f(z_0) = 0$ et $f(z_1) > 0$. Rodin et Sullivan ont montré le

THÉORÈME. *Lorsque* ε *tend vers* $0, f_\varepsilon$ *converge vers* f *uniformément sur les compacts de* $\mathcal{U}$.

C'est ce théorème que nous nous proposons de redémontrer ici. La première étape est la

PROPOSITION. *Il existe une constante* $K \geqslant 1$ *telle que chaque* f_ε *soit* K*-quasiconforme. De plus, si une sous-suite* (f_{ε_i}) *converge uniformément sur les compacts de* $\mathcal{U}$ *vers une fonction* g, *alors* g *est un homéomorphisme* K*-quasiconforme de* $\mathcal{U}$ *sur* $\mathring{\mathbf{D}}$.

La preuve utilise les arguments de [R-S] qui sont désormais classiques et que nous reproduisons ici. Ils reposent sur les deux lemmes géométriques suivants:

LEMME DE L'ANNEAU («Ring Lemma» dans [R-S]). *Soit* c *un cercle de rayon* ρ *et* $c_1, \ldots, c_n$ n *cercles tangents extérieurement à* c, *d'intérieurs deux à deux disjoints, tels que* c_i *soit tangent à* c_{i+1} *et* c_n *tangent à* c_1.

Il existe une constante $\tau_n > 0$ *ne dépendant que de* n *telle que chaque cercle* $c_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ *ait un rayon au moins égal à* $\tau_n \rho$.

Preuve du lemme de l'anneau. Fixons n. Tout d'abord, le rayon du plus grand cercle extérieur, par exemple c_1, est minoré par une constante ne dépendant que de n (obtenue lorsque tous les cercles extérieurs ont même rayon). Le rayon d'un cercle c_2 tangent à c_1 est également minoré universellement, car si il était trop petit, une chaîne de $n - 1$ cercles partant de c_2 ne pourrait pas s'échapper de l'interstice entre c_1 et c. On achève la preuve en répétant le raisonnement pour le cercle c_3 tangent à c_2 et ainsi de suite. □

Le lecteur poura consulter [Ha] pour des estimations de la constante τ_n.

Une suite de cercles $c_1, \ldots, c_n$ deux à deux distincts de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ est une chaîne lorsque c_i et c_{i+1} sont tangents si $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, ainsi que c_n et c_1 si ces derniers ne sont pas tangents au cercle unité. Le second lemme est le

LEMME DES CHAÎNES SÉPARANTES («Length-area lemma» dans [R-S]). *Soit* c *un cercle de* $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ *et* $s_1, \ldots, s_k$ k *chaînes disjointes qui séparent chacune* c *de l'origine et d'un point du cercle unité. Notons* $n_1, \ldots, n_k$ *les longueurs combinatoires de ces chaînes. Alors on a:*

$$\text{rayon}(c) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}}}.$$

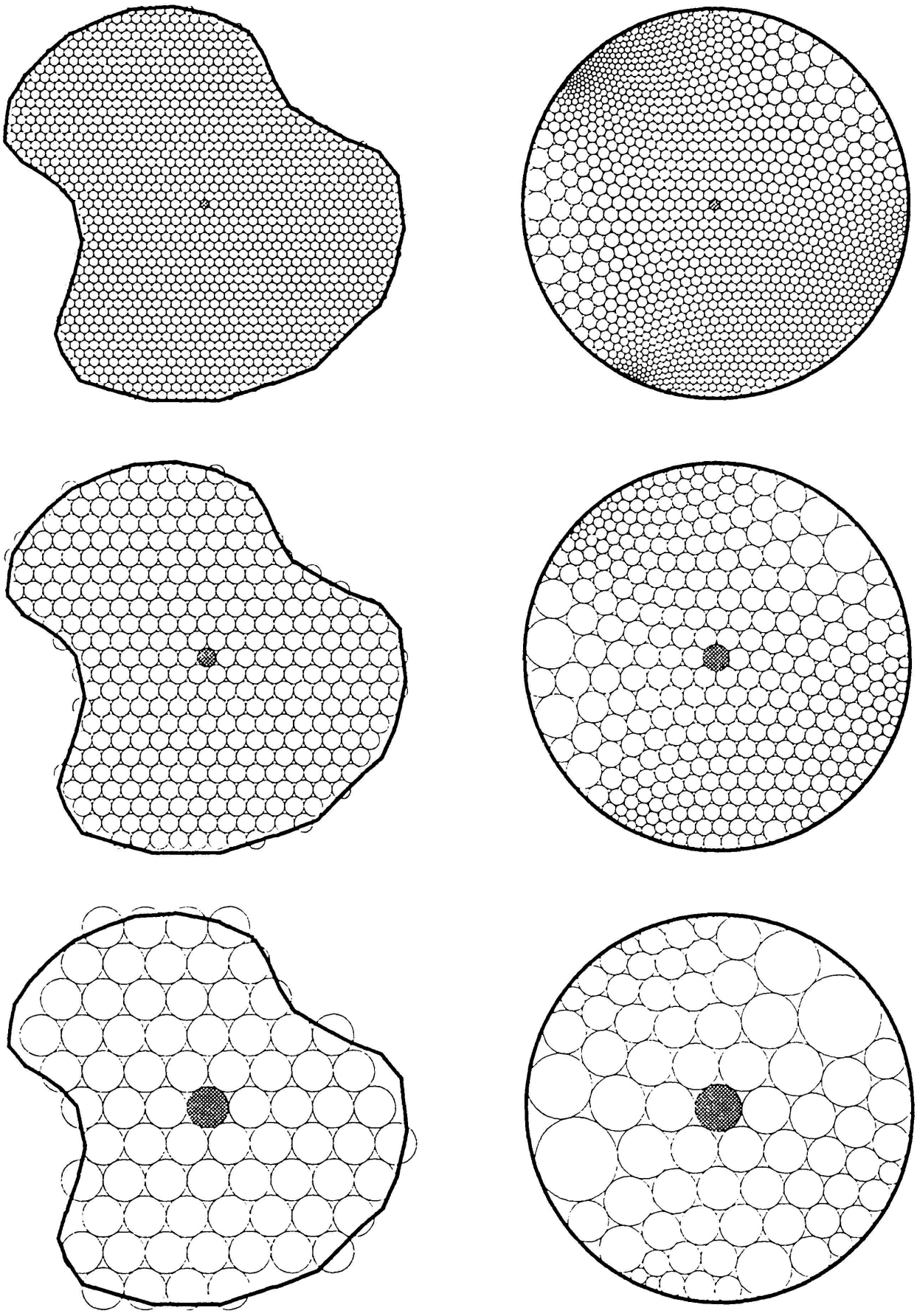

FIGURE 1

(aimablement fournie par Ken Stephenson):

trois empilements $\mathscr{H}_\varepsilon$ dans $\mathscr{U}$ et les trois empilements d'Andreev associés $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$ dans **D**

Preuve du lemme des chaînes séparantes. Notons $\rho_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n_j$, les rayons des cercles de la chaîne S_j. D'après l'inégalité de Schwarz, on a:

$$\left(\sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}\right)^2 \leqslant n_j \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}^2 .$$

Soit $l_j = 2 \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{i,j}$ la longueur géométrique de la chaîne S_j. On a donc

$$\frac{l_j^2}{n_j} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}^2, \quad \text{donc} \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{l_j^2}{n_j} \leqslant 4 \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}^2 \leqslant 4$$

de sorte que $l = \min\{l_1, \ldots, l_k\}$ vérifie:

$$l^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} \leqslant 4 .$$

A cause de l'hypothèse de séparation, l est plus grand que le diamètre de c, d'où le résultat. □

Preuve de la proposition. Notons $\tilde{\mathscr{E}}_\varepsilon$ la triangulation obtenue à partir de $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Le lemme de l'anneau appliqué avec $n = 6$ montre que les angles des triangles de $\tilde{\mathscr{E}}_\varepsilon$ sont minorés par une constante > 0, de sorte que l'application f_ε envoie des triangles équilatéraux sur des triangles dont la distorsion est bornée par une constante indépendante de ε. Ceci assure l'existence d'une constante K telle que pour tout ε, f_ε est K-quasiconforme.

Notons $\mathscr{U}_\varepsilon$ (resp. D_ε) le domaine de définition (resp. l'image) de f_ε. $\mathscr{U}_\varepsilon$ (resp. D_ε) n'est rien d'autre que la réunion des triangles de $\mathscr{H}_\varepsilon$ (resp. $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$). Il est clair que tout compact de $\mathscr{U}$ est contenu dans $\mathscr{U}_\varepsilon$ pour ε assez petit.

Comme les f_ε sont K-quasiconformes, et que $f_\varepsilon(z_0) = 0, \forall\varepsilon$, elles forment une famille équicontinue sur les compacts de $\mathscr{U}$, et donc une famille normale pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathscr{U}$ (voir [Ahl], théorème 1, p. 51). Examinons les propriétés de n'importe quelle fonction g limite d'une sous-suite $\{f_{\varepsilon_i}\}$. Déjà, g est définie sur $\mathscr{U}$ et est K-quasiconforme; g est injective car chaque f_{ε_i}, l'est. Montrons maintenant que l'image de g est $\mathring{\mathbf{D}}$ tout entier.

Il suffit pour cela de montrer que $d_{\mathscr{H}}(\partial D_\varepsilon; \partial D)$ tend vers 0 avec ε ($d_{\mathscr{H}}$ désigne la distance de Hausdorff). Or, lorsque $\varepsilon \to 0$, chaque cercle c du bord est séparé de l'origine et d'un point du cercle unité par de plus en plus de chaînes de longueurs $\leqslant 6, 12, 18\ldots$ Le lemme des chaînes séparantes

et la divergence de la série harmonique prouvent que le rayon de c tend vers 0 avec ε, d'où le résultat.

Toute fonction g limite de f_{ε_i} est donc un homéomorphisme K-quasi-conforme de $\mathcal{U}$ sur $\mathring{\mathbf{D}}$. □

Le but des sections qui suivent est de prouver le résultat crucial suivant:

LEMME-CLÉ. *Soit C un compact de $\mathcal{U}$, c et c' deux cercles tangents de $\mathcal{H}_\varepsilon$ centrés dans C et $\tilde{c}, \tilde{c}'$ les cercles de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ qui leur correspondent.*

Alors $\frac{\text{rayon}(\tilde{c})}{\text{rayon}(\tilde{c}')}$ *tend vers* 1 *lorsque* $\varepsilon \to 0$, *uniformément sur* C.

Signalons que c'est dans la preuve de ce lemme-clé donnée par Rodin et Sullivan qu'intervient leur résultat de rigidité de l'empilement hexagonal standard, argument que nous nous proposons justement de contourner. La méthode que nous allons suivre permet d'ailleurs d'obtenir un résultat plus fort:

VERSION QUANTITATIVE DU LEMME-CLÉ. *Avec les mêmes notations, il existe une constante M ne dépendant que de C telle que*

$$\left| \frac{\text{rayon}(\tilde{c})}{\text{rayon}(\tilde{c}')} - 1 \right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{-\operatorname{Log}\varepsilon}}$$

uniformément sur C.

Nous terminons cette section en montrant comment le lemme-clé permet de conclure. Ce lemme montre que la restriction à C de chaque f_ε envoie des triangles équilatéraux sur des triangles dont les angles tendent vers $\frac{\pi}{3}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, de sorte que toute limite g des f_ε est 1-conforme, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathcal{U}$ (voir [Ahl], théorème 2, p. 23).

Récapitulons: la famille $\{f_\varepsilon\}$ possède au moins une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts de $\mathcal{U}$, et la limite de toute telle sous-suite est une bijection holomorphe de $\mathcal{U}$ sur $\mathring{\mathbf{D}}$ envoyant z_0 sur 0 et z_1 sur l'axe réel positif, c'est-à-dire est l'uniformisation de Riemann f de $\mathcal{U}$ ainsi normalisée. Le théorème en résulte aussitôt.

III. DÉFORMATIONS D'EMPILEMENTS DE CERCLES

On va construire une famille continue d'empilements de cercles $\{\mathcal{H}_\varepsilon^t\}_{t \in [0,1]}$ telle que $\mathcal{H}_\varepsilon^0 = \mathcal{H}_\varepsilon$ et $\mathcal{H}_\varepsilon^1 = \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ et on va étudier la façon dont varient, en fonction de t, les rayons des cercles de $\mathcal{H}_\varepsilon^t$.

Comme l'ouvert $\mathcal{U}$ est borné, il est tout à fait licite de supposer que $\bar{\mathcal{U}}$ est contenu dans $\mathring{\mathbf{D}}$ et que $z_0 = 0$ et $z_1 > 0$, de sorte que tous les empilements que l'on va considérer seront contenus dans le disque unité $\mathbf{D}$.

A partir de maintenant nous adoptons le point de vue de la géométrie hyperbolique: $\mathring{\mathbf{D}}$ est muni de la métrique hyperbolique $ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$ à courbure -1. Tout cercle hyperbolique est un cercle euclidien (mais les centres ne sont pas les mêmes). En particulier, les cercles du bord d'un empilement d'Andreev sont des horocycles. C'est ce dernier fait qui motive l'emploi de la géométrie hyperbolique.

Il faut maintenant généraliser la notion d'empilement de cercles. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation (finie ou infinie) d'un disque topologique et S l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$. Soit $r = (r_s)_{s \in S} \in (\mathbf{R}_+^*)^S$. On munit chaque triangle de $\mathcal{T}$ de la métrique hyperbolique à courbure -1 qui au côté ss' affecte la longueur $r_s + r_{s'}$. On obtient ainsi une variété riemanienne à courbure -1 à singularités coniques, notée $\mathcal{T}_r$. Soit s un sommet d'un triangle T de $\mathcal{T}$. Si $\alpha(s, T)$ désigne l'angle en s dans le triangle T et si s est un sommet intérieur, alors la courbure en s est:

$$K_s(r) = 2\pi - \sum_{s \in T} \alpha(s, T) .$$

La famille de cercles $\mathcal{C} = \{C_s ; s \in S\}$, où C_s est le cercle de $\mathcal{T}_r$ de centre s de rayon r_s, possède la propriété suivante: les cercles C_s et $C_{s'}$ sont tangents si et seulement si l'arête ss' appartient au 1-squelette $\mathcal{T}^1$ de la triangulation $\mathcal{T}$.

Si, pour tout sommet intérieur s, on a $K_s(r) = 0$, alors la variété $\mathcal{T}_r$ est immergée isométriquement dans le disque de Poincaré $\mathbf{D}_{\text{hyp}}$ (mais non plongée *a priori*). On dit alors que $\mathcal{C}$ est un empilement de cercles de combinatoire $\mathcal{T}^1$. De plus, $\mathcal{C}$ est un empilement d'Andreev si et seulement si pour tout sommet s du bord de $\mathcal{T}$, $r_s = +\infty$.

REMARQUE. Un empilement d'Andreev est plongé dans le disque de Poincaré. En effet, la variété immergée $\mathcal{T}_r$ est alors à bord convexe, donc plongée d'après le théorème du §3 de [CV].

Le résultat suivant, démontré par Yves Colin de Verdière dans [CV] §5, est aussi le théorème 3 de [B-St2]:

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation finie d'un disque topologique, S (resp. B, I) l'ensemble de ses sommets (resp. sommets du bord; sommets intérieurs).*

Alors pour tout $(r_s)_{s \in B} \in]0, +\infty]^B$, il existe un unique $(r_s)_{s \in I} \in (\mathbf{R}_+^*)^I$ tel que la variété $\mathcal{T}_r$ soit immergée isométriquement dans $\mathbf{D}_{\text{hyp}}$.

On notera que le théorème d'Andreev-Thurston est un cas particulier de ce théorème (faire $r_s = +\infty, \forall s \in B$).

Soit $\Phi: [0, 1[\to [1, +\infty[, t \mapsto \Phi(t)$ un difféomorphisme prolongé par $\Phi(1) = +\infty$. Nous reprenons maintenant les notations de la section II. Pour $t \in [0, 1]$, $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ est défini par les trois conditions suivantes:

i) la combinatoire de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ est $\mathscr{C}_\varepsilon^1$;

ii) si r_ε est le rayon d'un cercle du bord de $\mathscr{H}_\varepsilon$, le rayon du cercle correspondant de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ est $r_\varepsilon(t) = \Phi(t) r_\varepsilon$;

iii) la condition de normalisation est la même que pour $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$.

Notons S_ε (resp. $B_\varepsilon, I_\varepsilon$) l'ensemble des sommets (resp. sommets du bord, sommets intérieurs) de $\mathscr{C}_\varepsilon$. Pour $s \in S_\varepsilon$ on pose:

$$u_\varepsilon^s = \Psi(r_\varepsilon^s) = \int_{r_\varepsilon^s}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sinh \sigma} = -\operatorname{Log} \tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2}$$

(c'est la variable utilisée par Yves Colin de Verdière dans [CV]). On va interpréter la famille $\left\{\frac{d}{dt} u_\varepsilon^s(t)\right\}_{s \in S_\varepsilon}$ comme solution d'un problème de Schrödinger discret.

Notons $u_\varepsilon^B = (u_\varepsilon^s)_{s \in B_\varepsilon} \in [0, +\infty[^{B_\varepsilon}$ (resp. $u_\varepsilon^I = (u_\varepsilon^s)_{s \in I_\varepsilon} \in [0, +\infty[^{I_\varepsilon}$) une famille de réels indexée par B_ε (resp. I_ε). Dans [CV], Yves Colin de Verdière construit une fonctionnelle $F: \mathbf{R}_+^{B_\varepsilon} \times \mathbf{R}_+^{I_\varepsilon} \to \mathbf{R}$ qui possède la propriété suivante: si $d_I F$ désigne la différentielle partielle de F par rapport aux variables indexées par I_ε, alors on a $d_I F(u_\varepsilon^B, u_\varepsilon^I) = 0$ si et seulement si la collection des rayons $\{\Psi^{-1}(u_\varepsilon^s)\}_{s \in S_\varepsilon}$ définit un empilement de cercles de combinatoire $\mathscr{C}_\varepsilon^1$.

Signalons que c'est ce choix de variable u_ε^s qui confère à la fonctionnelle F certaines propriétés — convexité, ... — lui assurant l'existence d'un point critique.

Explicitons la dérivée $d_I F$. Pour ce faire, à tout vecteur $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^s)_{s \in S_\varepsilon} \in \mathbf{R}_+^{S_\varepsilon}$ on associe la variété hyperbolique $\mathscr{C}_{r_\varepsilon}$ à courbure -1 à singularités coniques définie plus haut avec $r_\varepsilon = (r_\varepsilon^s)_{s \in S_\varepsilon}$ où $r_\varepsilon^s = \Psi^{-1}(u_\varepsilon^s)$. Notant $K_s(u_\varepsilon)$ la courbure en s on a:

$$d_I F(u_\varepsilon) = \sum_{s \in I_\varepsilon} K_s(u_\varepsilon) du_\varepsilon^s .$$

Dans le cas présent, pour tout $t \in [0, 1]$, la collection des rayons $\{r_\varepsilon^s(t)\}_{s \in S_\varepsilon}$ définit un empilement de cercles de combinatoire $\mathscr{C}_\varepsilon$ de sorte que l'on a, en posant $u_\varepsilon^s(t) = \Psi(r_\varepsilon^s(t))$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad d_I F[u_\varepsilon^B(t), u_\varepsilon^I(t)] = 0 .$$

Par dérivation, il vient:

$$d_{II}F[u_\varepsilon^B(t), u_\varepsilon^I(t)] \cdot \dot{u}_\varepsilon^I(t) + d_{BI}F[u_\varepsilon^B(t), u_\varepsilon^I(t)] \cdot \dot{u}_\varepsilon^B(t) = 0 ,$$

d'où:

$$\forall t \in [0,\ 1],\ \sum_{s \in I_\varepsilon} \left(\sum_{\substack{s' \in S_\varepsilon \\ d_c(s,s') \leqslant 1}} \frac{\partial K_s[u_\varepsilon(t)]}{\partial u_\varepsilon^{s'}} \dot{u}_\varepsilon^{s'}(t) \right) du_\varepsilon^s = 0$$

(d_c désigne la distance combinatoire dans le graphe $\mathscr{C}_\varepsilon$). On rappelle que d'après la formule de Gauss-Bonnet, l'aire d'un triangle hyperbolique T d'angles α, β, γ est $A(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, de sorte que, pour tout sommet intérieur s, on a:

$$\sum_{s' \in S_\varepsilon} \frac{\partial K_s(u_\varepsilon)}{\partial u_\varepsilon^{s'}} = \frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^s} + \sum_{s' \sim s} \frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^{s'}} = \sum_{T \ni s} \frac{\partial A(T)}{\partial u_\varepsilon^s}$$

(on note $s' \sim s$ pour s' voisin de s). Pour alléger les notations, on pose, pour $s \in I_\varepsilon$, et $s' \in S_\varepsilon$ voisin de s,

$$c_s = -\frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^s} + \sum_{T \ni s} \frac{\partial A(T)}{\partial u_\varepsilon^s} \quad \text{et} \quad c_{ss'} = -\frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^{s'}} .$$

Soit $b: B_\varepsilon \to \mathbf{R}$ une fonction numérique. A toute fonction $\varphi \in \mathbf{R}^{I_\varepsilon}$ prolongée par b sur B_ε on associe les fonctions $\Delta_b^{\varepsilon,t}\varphi = \Delta_b \varphi \in \mathbf{R}^{I_\varepsilon}$ et $V\varphi \in \mathbf{R}^{I_\varepsilon}$ définie respectivement par: pour tout $s \in I_\varepsilon$,

$$(\Delta_b \varphi)(s) = c_s \varphi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} \varphi(s')$$

$$\text{et} \quad (V\varphi)(s) = V(s)\varphi(s) = \left(-\sum_{T \ni s} \frac{\partial A(T)}{\partial u_\varepsilon^s} \right) \varphi(s) .$$

Les relations suivantes:

$$c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0; \quad c_{ss'} < 0; \quad c_s > 0; \quad c_{ss'} = c_{s's}$$

font de Δ_0 un laplacien discret sur I_ε, c'est-à-dire un endomorphisme symétrique défini positif de $\mathbf{R}^{I_\varepsilon}$. Le fait que $V(s)$ soit > 0 fait de $\Delta_0 + V$ un opérateur de Schrödinger discret sur I_ε (comparer avec [CV-M], section V).

En résumé, le vecteur $\dot{u}_\varepsilon(t) = (\dot{u}_\varepsilon^s(t))_{s \in S_\varepsilon}$ est solution de l'équation de Schrödinger suivante:

$$\begin{cases} \Delta_b^{\varepsilon,t} \dot{u}_\varepsilon + V\dot{u}_\varepsilon = 0 \\ \dot{u}_\varepsilon^s(t) = b(s) = \Phi'(t) \cdot \Psi'[r_\varepsilon^s(t)] \cdot r_\varepsilon^s(0) \quad \text{si } s \in B_\varepsilon . \end{cases}$$

En particulier, $\dot{u}_\varepsilon^s(t) < 0$ si $s \in B_\varepsilon$ (car $\Phi' > 0$ et $\Psi' < 0$). Or on dispose d'un principe du maximum pour les opérateurs de Schrödinger discrets:

LEMME. *Soit pour tout* $s \in I_\varepsilon$ *et* $s' \in S_\varepsilon$ *voisin de* I_ε *un réel* $b_{ss'} \in]0, 1[$ *tel que* $\sum_{s' \sim s} b_{ss'} < 1, \forall s$.

Soit $\varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon}$ *une fonction telle que* $\forall s \in I_\varepsilon$, $\varphi(s) = \sum_{s' \sim s} b_{ss'} \varphi(s')$.

Alors, si φ *est* $\leqslant 0$ *sur* B_ε, φ *est également* $\leqslant 0$ *sur* I_ε. *Si de plus* φ *s'annule sur* I_ε, *alors* φ *est nulle sur* S_ε.

Preuve du lemme. On observe tout d'abord que si $\varphi(s) > 0$ pour un $s \in I_\varepsilon$ alors il existe $s' \sim s$ tel que $\varphi(s') > \varphi(s)$, car, dans le cas contraire, on a

$$\varphi(s) = \sum_{s' \sim s} b_{ss'} \varphi(s') \leqslant \left(\sum_{s' \sim s} b_{ss'} \right) \varphi(s) < \varphi(s) \text{ qui est absurde.}$$

De proche en proche on aboutit à un sommet $s_1 \in B_\varepsilon$ tel que $\varphi(s_1) > \varphi(s) > 0$, de sorte que $\varphi \leqslant 0$ sur B_ε implique $\varphi \leqslant 0$ sur I_ε. Sachant maintenant que φ est $\leqslant 0$ sur S_ε, supposons qu'il existe $s \in I_\varepsilon$ tel que $\varphi(s) = 0$. Il est clair que $\varphi(s') = 0$, $\forall s' \sim s$. De proche en proche, on montre que φ est nulle sur S_ε. □

On applique le lemme aux coefficients $b_{ss'} = -\frac{c_{ss'}}{c_s + V(s)} > 0$ et on déduit que pour tout $s \in I_\varepsilon$, $\dot{u}_\varepsilon^s(t) < 0$. Comme $\dot{u}_\varepsilon^s(t) = \dot{r}_\varepsilon^s(t) \times \Psi'[\dot{r}_\varepsilon^s(t)]$ et que Ψ' est < 0 on déduit que $\dot{r}_\varepsilon^s(t)$ est > 0, $\forall s \in I_\varepsilon$, $\forall t \in [0, 1]$. En résumé, lorsque t croît de 0 à 1, les rayons hyperboliques de tous les cercles de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ augmentent strictement.

Le fait que nous venons de mettre en évidence est l'aspect essentiel d'un résultat, le lemme de Schwarz-Pick discret, qui mérite d'être formulé — et démontré — de façon autonome. Outre le fait que nous utiliserons ces résultats dans la prochaine section, signalons qu'il a fait l'objet de travaux d'Alan Beardon et Kenneth Stephenson (voir [B-St2]).

Soit S l'ensemble des sommets d'une triangulation $\mathscr{C}$ d'un disque topologique. Soient $r = (r_s)_{s \in S}$ et $r' = (r'_s)_{s \in S} \in (\mathbf{R}_+^*)$ et $\mathscr{C}_r$, $\mathscr{C}_{r'}$ les variétés hyperboliques à courbure -1 à singularités coniques définies comme précédemment à partir de $\mathscr{C}$, r et r'.

On note C_s (resp. C'_s) le cercle de $\mathscr{C}_r$ (resp. $\mathscr{C}_{r'}$) de centre s et de rayon r_s (resp. r'_s). On suppose que les familles $\mathscr{C} = \{C_s\}_{s \in S}$ et $\mathscr{C}' = \{C'_s\}_{s \in S}$ sont des empilements de cercles, c'est-à-dire que $\mathscr{C}_r$ et $\mathscr{C}_{r'}$ sont immergées isométriquement dans le disque de Poincaré. Rappelons que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ne sont pas supposés plongés (comparer à [B-St2]).

On a la

PROPOSITION (Lemme de Schwarz-Pick discret dans [B-St2]).

i) (monotonie). Si $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet frontière* s, *alors* $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet intérieur* s. *De plus, si* $r_{s_0} = r'_{s_0}$ *pour un sommet intérieur* s_0 *alors* $\forall s \in S$, $r_s = r'_s$;

ii) (lemme de Schwarz discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev (i.e.* $r'_s = +\infty$ *pour* $s \in B$*) alors* $r_s \leqslant r'_s$, $\forall s \in S$;

iii) (lemme de Pick discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev alors la distance entre deux sommets* s_0 *et* s_1 *dans* $\mathscr{C}_r$ *est inférieure à la distance entre les deux sommets correspondants dans* $\mathscr{C}_{r'}$.

Preuve de la proposition. Prouvons le point *i)*. On réalise la variété $\mathscr{C}_{r'}$, comme le temps 1 d'une déformation $\{\mathscr{C}_r(t);\ t \in [0, 1]\}$ de la variété $\mathscr{C}_r$ comme ci-avant, à ceci près que les rayons frontières de $\mathscr{C}_r(t)$ sont définis par

$$u_s(t) = \Psi(r_s(t)) = (1 - t)\Psi(r_s) + t\Psi(r'_s)\ .$$

Pour tout t, il existe un opérateur de Schrödinger discret $\Delta^t + V^t$ sur $\mathscr{C}^1$ (le 1-squelette de $\mathscr{C}$) tel que:

$$\begin{cases} \Delta^t \dot{u}(t) + V^t \dot{u}(t) = 0 \\ \dot{u}_s(t) = \Psi(r'_s) - \Psi(r_s) \quad \text{si } s \in B. \end{cases}$$

Comme Ψ est décroissante, on a $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$, $\forall s \in B$. D'après le principe du maximum pour les opérateurs de Schrödinger on a également $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$ pour tout sommet intérieur s, donc $\Psi(r'_s) \leqslant \Psi(r_s)$ donc $r'_s \geqslant r_s$ pour ces sommets. De plus, $r_{s_0} = r'_{s_0}$ pour un sommet intérieur s_0 implique $\dot{u}_{s_0}(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$ donc, d'après le même lemme, $\dot{u}_s(t) = 0$, $\forall t$, $\forall s \in S$ et donc $r_s = r'_s$, $\forall s \in S$.

Les points *ii)* et *iii)* résultent de *(i)*. □

IV. ESTIMATIONS À PRIORI DES RAYONS

Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans $\mathscr{U}$, et S_ε^K l'ensemble des sommets de $\mathscr{C}_\varepsilon$ contenus dans K. On note $\tilde{r}_\varepsilon = (\tilde{r}_\varepsilon^s)_{s \in S_\varepsilon}$ la collection des rayons de l'empilement d'Andreev $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Le but de cette section est de démontrer la