

VI. Inégalité de Harnack

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Considérons maintenant une isométrie hyperbolique j telle que $j(K')$ ne contienne pas 0. Notons h_λ l'homothétie euclidienne de centre 0 de rapport $1 + \lambda$. On définit l'emplacement $\mathcal{H}_\varepsilon^t(\lambda)$ comme étant l'image de $\mathcal{H}_\varepsilon^t$ par l'application $j^{-1} \circ h_\lambda \circ j$.

Avec les notations du lemme 2, on pose

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = \left. \frac{du_{\varepsilon,t}^s(t)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}.$$

φ_ε^t vérifie *i*) d'après ce lemme. De plus, comme j est une isométrie, on a d'après le lemme 3,

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = - \frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh r_\varepsilon^s(t)}$$

où $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$ est la distance à l'origine du centre du cercle de $j(\mathcal{H}_\varepsilon^t)$ correspondant au sommet s . Déjà, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cosh r_\varepsilon^s(t) = 1$ d'après le point *iii*) de la proposition du IV.

Notons δ la distance de 0 à $j(K')$, et σ, σ' les centres des cercles de $j(\mathcal{H}_\varepsilon^t)$ images par j de deux cercles tangents de $\mathcal{H}_\varepsilon^t$ correspondants aux sommets s et s' de S_ε^K .

Alors les longueurs $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$ et $\tilde{d}_\varepsilon^t(s')$ des côtés 0σ et $0\sigma'$ du triangle $(0\sigma\sigma')$ sont minorées par $\delta > 0$ tandis que la longueur $r_\varepsilon^s(t) + r_\varepsilon^{s'}(t)$ du côté $\sigma\sigma'$ tend vers 0 avec ε uniformément en t . On en déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s')} = 1, \quad \text{d'où} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon^t(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')} = 1,$$

la limite étant uniforme en t , ce qui prouve le point *ii*). \square

VI. INÉGALITÉ DE HARNACK

Le but de cette section est de terminer la preuve du théorème de Rodin-Sullivan en démontrant la

PROPOSITION (Inégalité de Harnack). *Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans \mathcal{U} et A, B deux réels vérifiant $0 < A < B$.*

Pour tout compact \tilde{K} d'intérieur non vide contenu dans $\overset{\circ}{K}$, il existe une constante $C = C(\tilde{K})$ possédant la propriété suivante:

Soit Δ_ε un laplacien discret sur S_s^K de la forme $\Delta_\varepsilon \varphi(s) = c_s^\varepsilon \varphi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'}^\varepsilon \varphi(s')$ et dont les coefficients vérifient: $\forall s, s' \in S_\varepsilon^K, \forall \varepsilon > 0, c_s^\varepsilon \in [A, B]$ et $-c_{ss'}^\varepsilon \in [A, B]$.

Soit ψ_ε une fonction définie sur S_ε^K , à valeurs positives non nulles et telle que $\Delta_\varepsilon \psi_\varepsilon = 0$.

Alors pour tous sommets voisins $s, s' \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$, on a:

$$\left| \frac{\Psi_\varepsilon(s)}{\Psi_\varepsilon(s')} - 1 \right| \leq \frac{C(\tilde{K})}{\sqrt{-\text{Log } \varepsilon}}.$$

Nous différons provisoirement la preuve de cette proposition, et montrons maintenant pourquoi celle-ci implique le lemme-clé de la section II. Soit donc \tilde{K} un compact d'intérieur non vide de \mathcal{U} . Il s'agit de voir que, grâce à la proposition, si $s, s' \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ sont voisins, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{\tilde{r}_\varepsilon^{s'}} = 1$$

et ce uniformément sur $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$. On part de

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^{s'} &= u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} + \int_0^1 (\dot{u}_\varepsilon^s - \dot{u}_\varepsilon^{s'}) dt \\ &= u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} + \int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s \left(1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s} \right) dt. \end{aligned}$$

On a

$$u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} = \text{Log} \frac{\tanh \frac{r_\varepsilon^{s'}}{2}}{\tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2}}$$

avec $r_\varepsilon^s \sim r_\varepsilon^{s'} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformément par rapport à s et $s' \sim s$ dans $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$, de sorte que $u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} \rightarrow 0$.

Soit φ_ε^t la fonction définie dans le lemme 4 de la section V avec un compact K contenu dans \mathcal{U} et dont l'intérieur contient \tilde{K} .

Soit ψ_ε^t la fonction définie par $\dot{u}_\varepsilon^s(t) = \varphi_\varepsilon^t(s) \cdot \psi_\varepsilon^t(s)$. D'après le lemme 1 de V, ψ_ε^t est solution d'une équation du type $\tilde{\Delta}_{\varepsilon,t} \psi_\varepsilon^t = 0$. Comme $\dot{u}_\varepsilon(t) < 0$ et que $\varphi_\varepsilon^t < 0$, on a que $\psi_\varepsilon^t > 0$. De plus, les coefficients de $\tilde{\Delta}_{\varepsilon,t}$ sont de la forme $\tilde{c}_{ss'}^\varepsilon = \varphi_\varepsilon^t(s) \varphi_\varepsilon^t(s') c_{ss'}$. Il résulte du point *ii*) de la proposition du IV, qu'il existe deux constantes A et $B > A > 0$ telles que $A \leq -\tilde{c}_{ss'}^\varepsilon \leq B$ et $A \leq \tilde{c}_s^\varepsilon \leq B$. La proposition de la présente section assure alors que $\frac{\psi_\varepsilon^t(s)}{\psi_\varepsilon^t(s')}$ tend vers 1 uniformément sur $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ et par rapport à $t \in [0, 1]$. D'après

le point *ii*) du lemme 4 de V, le quotient $\frac{\phi'_\varepsilon(s)}{\phi'_\varepsilon(s')}$ possède la même propriété de sorte que $\sup_{t \in [0, 1]} \left| 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}(t)}{\dot{u}_\varepsilon^s(t)} \right|$ tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformément sur $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$. Comme $\dot{u}_\varepsilon^s < 0$ on a donc:

$$\left| \int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s \cdot \left(1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s} \right) dt \right| \leq \sup_{[0, 1]} \left| 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s} \right| \times \int_0^1 (-\dot{u}_\varepsilon^s) dt$$

et

$$-\int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s dt = u_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^s = \text{Log} \frac{\tanh \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{2}}{\tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2}} \leq \text{Log} \frac{\tanh \frac{c_3 \varepsilon}{2}}{\tanh \frac{\varepsilon}{2c_3}}$$

où c_3 est la constante fournie par le point *iii*) de la proposition de IV. D'après les propriétés de la fonction \tanh au voisinage de 0, cette dernière quantité est majorée par une constante ne dépendant pas de ε . On en déduit que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^1 (\dot{u}_\varepsilon^s - \dot{u}_\varepsilon^{s'}) dt \right| = 0$ uniformément sur \tilde{K} . On en déduit donc que $\text{Log} \left(\tanh \frac{r_\varepsilon^{s'}}{2} / \tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2} \right) = \tilde{u}_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^{s'}$ tend vers 0 avec ε , et ce uniformément sur \tilde{K} , de sorte que le rapport $\left(\tanh \frac{r_\varepsilon^{s'}}{2} / \tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2} \right)$ tend vers 1. Comme les rayons \tilde{r}_ε^s et $\tilde{r}_\varepsilon^{s'}$ tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (résulte des points *i*) et *iii*) de la proposition du IV), le rapport $\frac{\tilde{r}_\varepsilon^{s'}}{\tilde{r}_\varepsilon^s}$ tend lui aussi vers 1 avec ε et uniformément sur \tilde{K} , ce qui est bien l'énoncé du lemme-clé. La version quantitative de ce lemme provient de l'estimation donnée dans la proposition.

Le théorème de Rodin-Sullivan est donc démontré modulo l'inégalité de Harnack. Nous terminons donc par la

Preuve de la proposition. Comme annoncé dans l'introduction, nous obtenons l'inégalité de Harnack par voie probabiliste. Le début de la preuve que voici s'inspire de [St2], §9.3 et de [Sp], §13-P1.

Introduisons la matrice de transition $P_\varepsilon = [p_{ss'}^\varepsilon]_{s, s' \in S_\varepsilon^K}$ associée au laplacien Δ_ε et définie par:

$$p_{ss'}^\varepsilon = -\frac{c_{ss'}^\varepsilon}{c_s^\varepsilon} \quad \text{si } s \sim s' \text{ et } p_{ss'}^\varepsilon = 0 \text{ sinon.}$$

On a $p_{ss'}^\varepsilon \in]0, 1[$ et $\forall s \in I_\varepsilon^K$ (les sommets intérieurs de S_ε^K), $\sum_{s' \sim s} p_{ss'}^\varepsilon = 1$.

De plus, il existe deux constantes α et β ne dépendant que de A et B telles que $0 < \alpha \leq p_{ss'}^\varepsilon \leq \beta < 1$, $\forall \varepsilon$, $\forall s \in I_\varepsilon^K$, $\forall s' \in S_\varepsilon^K$ tel que $s' \sim s$.

Sur l'univers $\Omega_\varepsilon = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \in (S_\varepsilon^K)^{\mathbb{N}}\}$ on considère la tribu cylindrique Σ_ε engendrée par les événements $\{\omega_{i_1} = s_1, \dots, \omega_{i_p} = s_p\}$ où

$p \in \mathbf{N}^*$, $i_1, \dots, i_p \in \mathbf{N}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, et $s_1, \dots, s_p \in S_\varepsilon^K$. On note X_n la variable aléatoire sur $(\Omega_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$ à valeurs dans S_ε^K et définie par $\forall \omega \in \Omega_\varepsilon$, $X_n(\omega) = \omega_n$.

Fixons un sommet $s \in S_\varepsilon^K$. On définit la probabilité P_s sur $(\Omega_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$ associée à la marche aléatoire partant de s , de la façon suivante:

$$P_s(X_0 = s) = 1 \text{ et } P_s(X_{n+1} = v \mid X_n = u) = \begin{cases} p_{uv}^\varepsilon & \text{si } u \in I_\varepsilon^K \\ \delta_{u,v} & \text{si } u \in B_\varepsilon^K \end{cases}$$

(B_ε^K sont les sommets frontières de S_ε^K). En particulier, on décide que les sommets de B_ε^K sont absorbants.

Soit $\tau_{B_\varepsilon^K}$ le premier temps d'atteinte du bord B_ε^K . C'est le temps d'arrêt défini par: $\tau_{B_\varepsilon^K}(\omega) = \inf \{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } X_n(\omega) \in B_\varepsilon^K\}$. On a le

LEMME 1. *Le temps d'arrêt $\tau_{B_\varepsilon^K}$ est fini P_s -presque sûrement.*

Preuve du lemme 1. Soit h la fonction définie sur S_ε^K par $h(s) = P_s\{\tau_{B_\varepsilon^K} < +\infty\}$. La fonction h est harmonique pour Δ_ε et vérifie $h(s) = 1$, $\forall s \in B_\varepsilon^K$ de sorte que, par unicité de la solution du problème de Dirichlet, $h(s) = 1$, $\forall s \in I_\varepsilon^K$. \square

Notons maintenant \mathbf{E}_s l'espérance pour la probabilité P_s . Pour toute fonction harmonique Ψ , on a $\mathbf{E}_s \Psi(X_1) = \Psi(s)$, puis (récurrence): $\mathbf{E}_s \Psi(X_n) = \Psi(s)$. Plus généralement, on a le

LEMME 2. *Pour toute fonction harmonique Ψ et pour tout temps d'arrêt τ vérifiant $\tau \leq \tau_{B_\varepsilon^K}$, on a: $\mathbf{E}_s \Psi(X_\tau) = \Psi(s)$.*

Preuve du lemme 2. Nous nous contentons ici de résumer la preuve de J.L. Doob de ce résultat classique (voir [Do], théorème 2.1, p. 437).

Soit \mathcal{F}_n la tribu sur Ω_ε engendrée par X_0, \dots, X_n . On observe que $(\Psi(X_{\tau \wedge n}); \mathcal{F}_n)$ est une martingale, de sorte que la suite des espérances $\mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n})$ est constante, donc:

$$\mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n}) = \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge (n-1)}) = \dots = \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge 0}) = \mathbf{E}_s \Psi(X_0) = \Psi(s).$$

D'autre part, comme S_ε^K est fini, la suite de fonctions $\Psi(X_{\tau \wedge n})$ est bornée, de sorte que le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n}) = \int_{\{\tau < +\infty\}} \Psi(X_\tau) dP_s.$$

Comme $\tau \leq \tau_{B_\varepsilon^K}$ qui est presque sûrement fini, on en déduit

$$\Psi(s) = \mathbf{E}_s \Psi(X_\tau). \quad \square$$

Terminons la preuve de la proposition. Soit $v \in S_\varepsilon^K$ un sommet voisin de s , et τ_v le temps d'arrêt défini par :

$$\tau_v(\omega) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } X_n(\omega) = v\}.$$

On applique le lemme 2 au temps d'arrêt $\tau = \tau_v \wedge \tau_{B_\varepsilon^K}$ et à la fonction ψ_ε de l'énoncé de la proposition. Il vient :

$$\psi_\varepsilon(s) = \int_{\Omega_\varepsilon} \psi_\varepsilon(X_\tau) dP_s = \int_{\{\tau = \tau_v\}} \psi_\varepsilon(X_{\tau_v}) dP_s + \int_{\{\tau = \tau_{B_\varepsilon^K}\}} \psi_\varepsilon(X_{\tau_{B_\varepsilon^K}}) dP_s.$$

Comme ψ_ε est positive et que $X_{\tau_v} = v$, on en déduit :

$$\psi_\varepsilon(s) \geq \psi_\varepsilon(v) \times P_s\{\tau = \tau_v\}.$$

Il reste donc à mesurer l'écart à 1 de $P_s\{\tau = \tau_v\}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Fixons le sommet $v \in I_\varepsilon^K$, et considérons la fonction Φ donnée par $\Phi(s) = P_s\{\tau = \tau_v\}$: c'est la probabilité qu'une marche aléatoire partant de s atteigne v avant le bord. On observe que $\Phi(v) = 1$, que $\Phi(s) = 0$ si $s \in B_\varepsilon^K$ et que Φ est harmonique sur S_ε^K sauf en v et sur B_ε^K .

Nous allons donner une interprétation électrique de Φ . Considérons un circuit électrique de combinatoire $\mathcal{C}_\varepsilon^K$ (i.e. la trace de \mathcal{C}_ε sur K) tel que la conductance de l'arête ss' soit $-c_{ss'}^\varepsilon$. Si on branche tous les sommets de B_ε^K au potentiel 0 et le sommet v au potentiel 1 alors le potentiel au sommet s n'est autre que $\Phi(s)$ (voir [D-S], p. 47). En égalant la puissance dissipée par le circuit et la puissance fournie par le générateur (voir [D-S], p. 61), on a :

$$\frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} -c_{ss'}^\varepsilon [\Phi(s) - \Phi(s')]^2 = C_{\text{eff}}^{v,B} [\Phi(v) - \Phi(B)]^2 = \frac{1}{R_{\text{eff}}^{v,B}}$$

où $C_{\text{eff}}^{v,B}$ (resp. $R_{\text{eff}}^{v,B}$) désigne la conductance effective (resp. résistance effective) du circuit entre v et le bord $B = B_\varepsilon^K$.

Il reste à évaluer $R_{\text{eff}}^{v,B}$. C'est l'objet du

LEMME 3. *Il existe une constante $c_1(\tilde{K})$ ne dépendant que de \tilde{K} telle que $\forall v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}, R_{\text{eff}}^{v,B} \geq \frac{-\text{Log } \varepsilon}{c_1(\tilde{K})}$.*

Ce lemme termine la preuve de la proposition. En effet, pour tous sommets $v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ et $s \in S_\varepsilon^K$ voisin de v , on a :

$$\frac{1}{2} A [\Phi(v) - \Phi(s)]^2 \leq \frac{1}{R_{\text{eff}}^{v,B}} \leq \frac{c_1(\tilde{K})}{-\text{Log } \varepsilon}$$

de sorte que $1 - P_s\{\tau = \tau_v\} \leq \frac{c}{\sqrt{-\text{Log } \varepsilon}}$ avec $c = \sqrt{\frac{2c_1(\tilde{K})}{A}}$, ce qui est bien

l'estimation annoncée.

Preuve du lemme 3. On compare le circuit électrique étudié au circuit standard de combinatoire $\mathcal{C}_\varepsilon^K$ pour lequel les résistances de toutes les arêtes sont égales à 1. On note $\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}$ la résistance effective du circuit standard entre ν et $B = B_\varepsilon^K$. D'après le principe de Dirichlet (voir [D-S], p. 63-64) on a :

$$\frac{1}{R_{\text{eff}}^{\nu, B}}$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} -c_{ss'}^\varepsilon [\varphi(s) - \varphi(s')]^2 \mid \varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon^K}, \varphi = 0 \text{ sur } B_\varepsilon^K, \varphi(\nu) = 1 \right\}$$

et

$$\frac{1}{\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}} = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} [\varphi(s) - \varphi(s')]^2 \mid \varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon^K}, \varphi = 0 \text{ sur } B_\varepsilon^K, \varphi(\nu) = 1 \right\}.$$

Compte tenu des estimations $0 < A \leq -C_{ss'}^\varepsilon \leq B$, on a :

$$\forall \nu \in I_\varepsilon^K, \quad A \leq \frac{\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}}{R_{\text{eff}}^{\nu, B}} \leq B.$$

La fin de la preuve du lemme 3 repose sur les deux lemmes suivants. On commence par évaluer $\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}$ dans un cas particulier.

LEMME 4. Si $\mathcal{C}_\varepsilon^K$ est isomorphe à la triangulation d'un hexagone régulier de côté N par des triangles équilatéraux unités et si ν est le centre de $\mathcal{C}_\varepsilon^K$, alors on a :

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B} \geq \frac{1}{12} \text{Log } N.$$

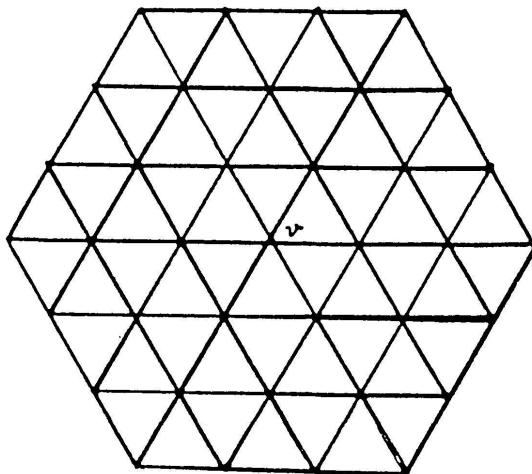


FIGURE 3

La triangulation $\mathcal{C}_\varepsilon^K$ avec $N = 3$

Preuve du lemme 4. D'après la loi de monotonie de Rayleigh ([D-S], p. 67), si l'une des résistances du circuit standard diminue, alors la résistance $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B}$ diminue. Remplaçons toute résistance joignant deux sommets à même distance combinatoire de v par la résistance nulle, de sorte que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, les sommets à distance combinatoire k de v sont au même potentiel. Le circuit standard ainsi diminué est équivalent au circuit suivant (cf. fig. 4):

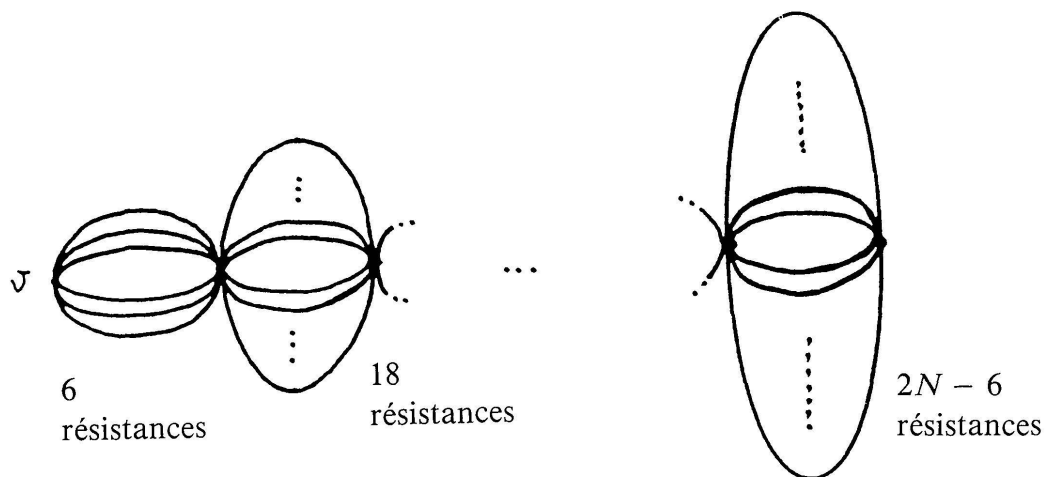


FIGURE 4
Le circuit standard diminué

Comme n résistances de 1 Ohm en parallèle sont équivalentes à une résistance de $\frac{1}{n}$ Ohm, la résistance du circuit ci-dessus entre ses deux extrémités est égale à $\sum_{k=1}^N \frac{1}{12k-6}$ car il y a $12k-6$ résistances entre la $(k-1)^{\text{e}}$ et la k^{e} génération.

La résistance effective du circuit non modifié vérifie donc:

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{12k-6} \geq \frac{1}{12} \text{Log } N.$$

LEMME 5. Soit $d(v)$ le rayon de la plus grande boule combinatoire de centre v et contenu dans S_{ε}^K .

Alors on a $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \frac{1}{12} \text{Log } d(v)$.

Preuve du lemme 5. $\mathcal{C}_{\varepsilon}^K$ contient une sous-triangulation, isomorphe à la triangulation d'un hexagone régulier de côté $d(v)$ par des triangles équilatéraux unités, dont le centre est v , et dont le bord est noté B' . En remplaçant toutes les résistances en dehors de ce sous-circuit par des résistances nulles,

on amène le bord B' au potentiel 0. Toujours d'après la loi de monotonie de Rayleigh, on a alors :

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \frac{1}{12} \text{Log } d(v),$$

la dernière inégalité résultant du lemme 4. \square

Fin de la preuve du lemme 3. Soit \tilde{K} le compact de l'énoncé de la proposition. Rappelons qu'il est contenu dans l'intérieur de K . Notons δ la distance hyperbolique de \tilde{K} à $\mathbf{D}^2 \setminus K$. Pour tout sommet $v \in S_{\varepsilon}^{\tilde{K}}$ on a $d(v) \geq \frac{\delta}{\varepsilon}$, donc $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq -\frac{1}{12} \text{Log } \delta \varepsilon$, ce qui est bien le résultat cherché. \square

VII. COMMENTAIRES

1. SUR L'INÉGALITÉ DE HARNACK

L'estimation obtenue ici en $\frac{1}{\sqrt{-\text{Log } \varepsilon}}$ n'est ni optimale, ni propre aux réseaux récurrents, comme la preuve peut le laisser penser. Les résultats les plus significatifs ont été obtenus par Gregory Lawler (voir [La1] et [La2]). Soit u une fonction de \mathbf{Z}^d dans \mathbf{R} . On pose

$$\Delta_0 u(x) = u(x) - \frac{1}{2d} \sum_{s \sim x} u(s)$$

(la somme est étendue à tous les voisins de x dans le réseau \mathbf{Z}^d).

THÉORÈME 1. *Il existe une constante C telle que si u est une fonction harmonique (pour Δ_0) positive sur la boule combinatoire de \mathbf{Z}^d de centre 0 de rayon N , alors*

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leq \frac{C}{N}.$$

Dans le cas de la dimension 3, ce théorème avait déjà été démontré par R.J. Duffin ([Du]) dans les années cinquante. Dans [L1], G. Lawler étudie également les opérateurs à coefficients variables :

THÉORÈME 2. *Soit A, B deux réels vérifiant $0 < A < B$. Il existe alors deux réels C et $\alpha, \alpha \in]0, 1[$, qui ne dépendent que de A, B et d , et possédant la propriété suivante :*