VII. Commentaires

on amène le bord B' au potentiel 0. Toujours d'après la loi de monotonie de Rayleigh, on a alors:

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \frac{1}{12} \operatorname{Log} d(v) ,$$

la dernière inégalité résultant du lemme 4. □

Fin de la preuve du lemme 3. Soit $\tilde{K}$ le compact de l'énoncé de la proposition. Rappelons qu'il est contenu dans l'intérieur de K. Notons δ la distance hyperbolique de $\tilde{K}$ à $\mathbf{D}^2 \backslash K$. Pour tout sommet $v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ on a $d(v) \geqslant \frac{\delta}{\varepsilon}$, donc $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant -\frac{1}{12} \operatorname{Log} \delta\varepsilon$, ce qui est bien le résultat cherché. □

VII. Commentaires

1. Sur l'inégalité de Harnack

L'estimation obtenue ici en $\frac{1}{\sqrt{-\operatorname{Log}\varepsilon}}$ n'est ni optimale, ni propre aux réseaux récurrents, comme la preuve peut le laisser penser. Les résultats les plus significatifs ont été obtenu par Gregory Lawler (voir [La1] et [La2]). Soit u une fonction de $\mathbf{Z}^d$ dans $\mathbf{R}$. On pose

$$\Delta_0 u(x) = u(x) - \frac{1}{2d} \sum_{s \sim x} u(s)$$

(la somme est étendue à tous les voisins de x dans le réseau $\mathbf{Z}^d$).

THÉORÈME 1. *Il existe une constante C telle que si u est une fonction harmonique (pour Δ_0) positive sur la boule combinatoire de $\mathbf{Z}^d$ de centre 0 de rayon N, alors*

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leqslant \frac{C}{N} .$$

Dans le cas de la dimension 3, ce théorème avait déjà été démontré par R.J. Duffin ([Du]) dans les années cinquante. Dans [L1], G. Lawler étudie également les opérateurs à coefficients variables:

THÉORÈME 2. *Soit A, B deux réels vérifiant $0 < A < B$. Il existe alors deux réels C et $\alpha, \alpha \in]0,1[$, qui ne dépendent que de A, B et d, et possédant la propriété suivante:*

Soit L *un opérateur de la forme* $Lu(s) = c_s u(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} u(s')$ *opérant sur les fonctions numériques définies sur* $\mathbf{Z}^d$ *et dont les coefficients vérifient:* $A \leqslant c_s \leqslant B$, $A \leqslant -c_{ss'} \leqslant B$, $c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0$ *et* $c_{ss'} = c_{ss''}$ *où* s'' *est le symétrique de* s' *par rapport à* s. *Alors si* u *est une fonction définie sur la boule combinatoire de* $\mathbf{Z}^d$ *de centre* 0 *de rayon* N, *telle que*

$$Lu = 0 \quad et \quad u \geqslant 0 ,$$

on a

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leqslant \frac{C}{N^\alpha} .$$

On notera que la condition de symétrie sur les coefficients n'est pas celle d'un laplacien discret (à savoir $c_{ss'} = c_{s's}$).

2. Sur le théorème de Rodin-Sullivan

Nous citons ici deux généralisations du théorème de Rodin-Sullivan. Soit $\mathscr{T}^1$ le 1-squelette d'une triangulation $\mathscr{T}$ d'un disque topologique et $\mathscr{P}$ un empilement de cercles de combinatoire $\mathscr{T}^1$ plongé isométriquement dans $\mathscr{U}$. Notons $\tilde{\mathscr{P}}$ l'empilement d'Andreev associé à $\mathscr{P}$ normalisé comme au début de II. On note $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ (resp. $\mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{P}}}$) la réalisation géométrique de $\mathscr{T}$ définie par $\mathscr{P}$ (resp. $\tilde{\mathscr{P}}$), et $f_{\mathscr{P}} : \mathscr{T}_{\mathscr{P}} \to \mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{P}}}$ l'application affine par morceaux qui envoie de manière affine chaque triangle de $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ sur son correspondant dans $\mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{P}}}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que la distance de Hausdorff $d_{\mathscr{H}}(\partial \mathscr{T}_{\mathscr{P}}, \partial \mathscr{U})$ soit $\leqslant \varepsilon$ ainsi que tous les rayons des cercles de $\mathscr{P}$. On a le

Théorème 1. *S'il existe une constante* C *telle que pour tous cercles* c, c' *de* $\mathscr{P}$,

$$\frac{1}{C} \leqslant \frac{\text{rayon}(c)}{\text{rayon}(c')} \leqslant C .$$

Alors $f_{\mathscr{P}}$ *converge uniformément sur les compacts de* $\mathscr{U}$ *vers l'uniformisation de Riemann* f *de* $\mathscr{U}$, *lorsque* ε *tend vers* 0.

Ce théorème a été obtenu en premier par Kenneth Stephenson en 1991 (voir [St1] et [St2]). Sa preuve repose sur le lemme de Schwarz-Pick discret de [B-St2] et le théorème de récurrence de Pólya.

En 1993, Zheng-Xu He et Burt Rodin ont montré comme le résultat de rigidité de Rodin-Sullivan permettait de prouver le théorème 1 (voir [He-R]). Ils obtiennent également la même conclusion sous des hypothèses plus faibles:

THÉORÈME 2. *On suppose que les valences des empilements* $\mathcal{P}$ *sont bornées par un entier positif* k_0.

Alors $f_{\mathcal{P}}$ *converge vers* f *uniformément sur les compacts de* $\mathcal{U}$ *lorsque* ε *tend vers* 0.

Leur méthode repose sur des arguments développés par He dans [He]. *Rajouté sur épreuves:* Laurent Saloff-Coste a récemment amélioré l'inégalité de Harnack (voir [Sa]). Quant au théorème de Rodin-Sullivan, il a été considérablement généralisé par Zheng-Xu He et Oded Schramm (voir [He-Sc]).

BIBLIOGRAPHIE

[Ahl] AHLFORS, L. *Lectures on quasi-conformal mappings.* Van Nostrand, 1982.

[An] ANDREEV, E.M. On convex polyhedra in Lobačevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik 10* (1970), 413-440.

[B] BEARDON, A. *The geometry of discrete groups.* Springer Verlag, 1983.

[B-St1] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. The uniformisation theorem for circle packings. *Indiana University Math. J. 39 (No. 4)* (1990), 1383-1425.

[B-St2] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. The Schwarz-Pick lemma for circle packings. *Ill. J. of Math. 35 (No. 4)* (1991), 577-606.

[B-St3] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. Circle packings in different geometries. *Tôhoku Math. J. 43* (1991), 27-36.

[CV] COLIN DE VERDIÈRE, Y. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Invent. Math. 104* (1991), 655-669.

[CV-M] COLIN DE VERDIÈRE, Y. et F. MATHÉUS. Empilements de cercles et approximations conformes. A paraître dans les Actes de la Table Ronde de Géométrie Riemannienne en l'honneur de Marcel Berger, Arthur L. Besse (éditeur), Collection SMF *Séminaires et Congrès N° 1,* 1996.

[Do] DOOB, J.L. Discrete potential theory and boundaries. *Journal of Math. and Mech. 8* (1959), 433-458.

[D-S] DOYLE, P.-G. and J.-L. SNELL. *Random walks and electrical networks.* The Carus Math. Monographs, Math. Assoc. of America, 1984.

[Du] DUFFIN, R.-J. Discrete potential theory. *Duke Math. Journal 20* (1953), 233-251.

[Ha] HANSEN, L.-J. On the Rodin and Sullivan ring lemma. *Complex variables, Theory and applications 10* (1988), 23-30.

[He] HE, Z.-X. An estimate for hexagonal circle packings. *J. of Differential Geom. 33* (1991), 395-412.

[He-R] HE, Z.X. and B. RODIN. Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mapping. *Communications in Analysis and Geometry 1 (1)* (1993), 31-41.