

# 1. A FINITE ALPHABET

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 1. A FINITE ALPHABET

Although  $g$  is, compared with the trivially square-free sequence  $(k)_{k \in \mathbf{N}}$ , economic in the sense that it uses smaller numbers for any finite part, it is unsatisfactory to depend on an *infinite* alphabet. Instead of considering  $d_\mu$  in the Olive sequence, we now focus on  $(i_\mu, j_\mu)$ , i.e. disregarding which disc is involved, we concentrate on the ways the discs are moving. Of these there are only six, namely

$$\alpha := (0, 1), \quad \beta := (1, 2), \quad \gamma := (2, 0), \quad \bar{\alpha} := (1, 0), \quad \bar{\beta} := (2, 1), \quad \bar{\gamma} := (0, 2),$$

which will form the alphabet  $\mathcal{A} := \{\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$ . J.-P. Allouche *et al.* [2, Theorem 9] have shown that the sequence  $c := (i_\mu, j_\mu)_{\mu \in \mathbf{N}}$  (named for N. Claus de Siam, who described the recursive solution in [7]) is square-free by recourse to the language of iterated morphisms. (For another interesting property of this sequence see Allouche and F. Dress [3].) We give a direct proof now, using only the following property of the TH itself:

LEMMA. *If  $\mu = 2^r(2k + 1)$ ,  $r, k \in \mathbf{N}_0$ , then*

$$\begin{aligned} i_\mu &= \{(1 + r \bmod 2)k\} \bmod 3, \\ j_\mu &= \{(1 + r \bmod 2)(k + 1)\} \bmod 3. \quad \square \end{aligned}$$

*Proof.* a) Let  $n \in \mathbf{N}$  be such that  $\mu < 2^n$  and put  $i = 0, j = 2 - n \bmod 2$  in [13, Proposition 1]. Then, using  $d_\mu = r + 1$ , we get

$$\begin{aligned} i_\mu &= \{k(2 - n \bmod 2)((n - r - 1) \bmod 2 + 1)\} \bmod 3 \\ &= \{(1 + r \bmod 2)k\} \bmod 3, \end{aligned}$$

and similarly for  $j_\mu$ .

b) As an alternative, we can prove this lemma directly by induction. Assume it is true for  $1 \leq \mu < 2^n$ ,  $n \in \mathbf{N}_0$ , when  $n$  discs move from peg 0 to peg  $2 - n \bmod 2$ . Then  $\mu = 2^n$  is the move of disc  $n + 1$  from 0 to  $1 + n \bmod 2$ . For  $2^n < \mu < 2^{n+1}$ , discs 1 to  $n$  are transferred from  $2 - n \bmod 2$  to  $1 + n \bmod 2$ ; hence move  $\mu$  is the same as move  $\mu - 2^n$  with 0, 1, 2 changed to 1, 2, 0, respectively, if  $n$  is odd, and to 2, 0, 1, if  $n$  is even. But then, since  $\mu - 2^n$  is divisible by the same power of 2 as  $\mu$  itself, we have  $\mu - 2^n = 2^r(2(k - 2^{n-r-1}) + 1)$ , and the formulas follow from  $((1 + r \bmod 2)2^{n-r-1}) \bmod 3 = 2 - n \bmod 2$ .  $\square$

There are a couple of immediate consequences which we will need later:

COROLLARY.

- o)  $c_\mu \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \Leftrightarrow r \bmod 2 = 0$ ;
- i)  $c_\mu \in (\{0, 1, 2\} \setminus \{(2\mu) \bmod 3\})^2$ ;
- ii)  $c_\mu = \alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \Leftrightarrow c_{2\mu} = \bar{\gamma}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}, \gamma, \beta, \alpha$ , respectively.  $\square$

*Proof.* (o) is trivial; (i) and (ii) follow from

$$2\mu = (1 + r \bmod 2)(k + 2),$$

$$1 + (r + 1) \bmod 2 = 2(1 + r \bmod 2),$$

both taken modulo 3, respectively.  $\square$

REMARK. Another direct consequence of the Lemma is (cf. [3, p. 10]):

$$c_\mu = \alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \Leftrightarrow \\ \exists s, l \in \mathbf{N}_0 : \frac{\mu}{4^s} = 6l + 1, 6l + 3, 6l + 5, 12l + 10, 12l + 6, 12l + 2,$$

respectively.

Our asymmetric choice of the first move being from 0 to 1 is here reflected in having, in some sense, twice as many unbarred as barred symbols in  $c$ , as remarked in [3, p.13].  $\square$

Now we can prove the result of Allouche *et al.* :

THEOREM 1.  $c$  is square-free.  $\square$

*Proof.* Assume

$$\exists m \in \mathbf{N}_0 \exists l \in \mathbf{N} \quad \forall \nu \in \{m + 1, \dots, m + l\} : c_{\nu+l} = c_\nu.$$

If  $l$  is odd, then  $\nu$  and  $\nu + l$  have different parity. So every  $\nu \in \{m + 1, \dots, m + 2l\}$  has an even number of factors 2 by Corollary (o). Since of four consecutive numbers one has exactly one factor 2,  $l$  can only be 1. This, however, contradicts Corollary (i). Hence  $l$  must be even. But then, by virtue of Corollary (ii), the same argument as in the proof of Theorem 0 applies.  $\square$