

7. Remarks and open problems

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$I_\alpha := \prod_{i=1}^n [|\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}|, \alpha_{2i} + \alpha_{2i-1}]$$

and consider the convex polytope $\Delta_\alpha \subset \mathbf{R}^n$

$$\Delta_\alpha := \begin{cases} I_\alpha \cap (\mathbf{R}_+ \cdot \bar{\mathbf{E}}_n) & \text{when } m = 2n \\ I_\alpha \cap (\mathbf{R}_+ \cdot \bar{\mathbf{E}}_n) \cap \{x_n = |\rho(m)|\} & \text{when } m = 2n - 1 \end{cases}.$$

PROPOSITION 6.7. 1) The image of $\partial : {}^m\mathcal{P}^k(\alpha)_+ \longrightarrow \mathbf{R}^n$ is the whole polytope Δ_α .

2) If $x \in \Delta_\alpha$ is a regular value of ∂ , the even-step map e induces, for $m = 3$, a symplectomorphism from the symplectic reduction $T^n \setminus \partial^{-1}(x)$ onto ${}^n\mathcal{P}_+^k(x)$. \square

7. REMARKS AND OPEN PROBLEMS

(7.1) Is there an octonionic version of Section 3? Alternately, are there $U_1(\mathbf{H})$ bendings in dimension 5 (like the $U_1(\mathbf{C})$ bending flows in dimension 3 and $U_1(\mathbf{R})$ flippings in dimension 2)?

(7.2) Observe that the inclusion ${}^m\mathcal{P}^k \subset {}^m\mathcal{P}^{k+1}$ becomes a bijection when $k \geq m - 1$ (triangles are always planar, etc.). In what ways are these spaces ${}^m\mathcal{P}^{m-1}$ more natural than the unstable ones?

(7.3) The m -polygons whose first diagonal is of a given length forms a sphere bundle over a space of $(m - 1)$ -polygons. (For $k = 3$ this is just symplectic reduction by the first bending circle.) This gives an inductive way to construct the space of m -polygons by gluing together (sphere bundles over) the spaces of $(m - 1)$ -polygons; it would require identification of these sphere bundles, which in $k = 3$ might be done using the Duistermaat-Heckman theorem (where the circle bundle is determined by its Euler class).

Alternately one might work out the fibers of the whole map d of section 5. Unfortunately in dimensions above 3 these are always singular (at, in particular, the planar polygons).

(7.4) In [KM1] and [Wa] there are presented “wall-crossing arguments” for identifying the spaces ${}^m\mathcal{P}^2(\alpha)$. It would be nice to relate these to a combination of [Du] and the paper [GS2], which presents its own wall-crossing arguments for any symplectic reduction by a torus.

(7.5) A space of great interest nowadays is the moduli space of flat $SU(2)$ connections on a punctured Riemann sphere — in the language of this paper, geodesic polygons in S^3 (rather than \mathbf{R}^3). The spaces here can be seen as limiting versions where the radius of S^3 goes to infinity. We do not know how to adapt the Gel'fand-MacPherson correspondence to this case; one definite complication is that it is no longer the symmetric group but the braid group which permutes the edges, and that action is not complex.

(7.6) By averaging the Riemannian metric with respect to the bending torus, one can deform the complex structure on a space of prodigal polygons to that of the corresponding toric variety. Is the original complex structure that of a toric variety (not just in the same deformation class)?

REFERENCES

- [Au] AUDIN, M. *The topology of torus actions on symplectic manifolds*. Birkhäuser, 1991.
- [DJ] DAVIS, M. and T. JANUSZKIEWICZ. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. *Duke Math. J.* 62 (1991), 417–451.
- [De] DELZANT, T. Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France* 116 (1988), 315–339.
- [Du] DUISTERMAAT, J. J. Convexity and tightness for restrictions of Hamiltonian functions to fixed-point sets of an antisymplectic involution. *Trans. AMS* 275 (1983), 417–429.
- [Fr] FRANKLIN, J. *Matrix theory*. Prentice-Hall, 1968.
- [GGMS] GEL'FAND, I., M. GORESKY, R. MACPHERSON and V. SERGANOVA. Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells. *Adv. Math.* 63 (1987), 301–316.
- [GM] GEL'FAND, I. and R. MACPHERSON. Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm. *Adv. Math.* 44 (1982), 279–312.
- [Gu] GUILLEMIN, V. *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n -spaces*. Birkhäuser, 1994.
- [GS1] GUILLEMIN, V. and S. STERNBERG. The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds. *J. Funct. Anal.* 52(1) (1983), 106–128.
- [GS2] GUILLEMIN, V. and S. STERNBERG. Birational equivalence in the symplectic category. *Inventiones Math.* 97 (1989), 485–522.
- [Ha] HAUSMANN, J.-C. Sur la topologie des bras articulés. In “Algebraic Topology, Poznan”. *Springer Lectures Notes* 1474 (1989), 146–159.
- [HK] HAUSMANN, J.-C. and A. KNUTSON. The cohomology ring of polygon spaces. Preprint (1997). <http://www.unige.ch/math/biblio>
- [Ho] HOPF, H. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Annalen* 104 (1931), 637–665.