1. Le résultat principal

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Observer que dans l'ouvert $xyzw \neq 0$, on a

$$T = \left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right],$$

d'où $T = T^{-1}$.

Ces transformations ont été l'objet d'études détaillées, voir [1], [3], [7], [8], [9], [16] et plus récemment [12]. Ici on utilise la théorie de la liaison des courbes algébriques ([11], [14]) pour classer ces transformations en trois types; on donne quelques exemples et à la fin on fait le lien avec les travaux classiques.

1. Le résultat principal

Soit $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona. On choisit des ouverts non vides U et V de $\mathbf{P}^3$ tels que la restriction de T à U induise un isomorphisme

$$\tau : U \to V .$$

Soit $Z \subset \mathbf{P}^3$ une sous-variété linéaire. Si Z est *générique*, alors $Z \cap V \neq \varnothing$ et $\overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$ est une sous-variété qui ne dépend pas du choix de U et V : on l'appelle *transformée stricte* de Z par T et on la note $\widetilde{T^{-1}}(Z) := \overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$.

Par définition, le degré $\deg(T)$ de T est le degré du transformé strict d'un plan générique. Si L est une droite générique, on peut supposer que L ne rencontre pas le lieu d'indétermination de T^{-1} et dans ce cas, la restriction de T^{-1} à L est décrite par un système linéaire sans points base de degré égal au degré de T^{-1} ; il s'ensuit que $\deg(T^{-1})$ est égal au degré de $\widetilde{T^{-1}}(L)$ (voir aussi [7, chap.IX, §3]).

On note $\mathbf{T}_{3,3}$ l'ensemble des transformations de Cremona de bidegré (3,3). La transformée stricte d'une droite générique par une telle transformation est donc une cubique rationnelle: c'est ou bien une cubique gauche, ou bien une cubique plane singulière.

Définitions 1.1. Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}$ et $L, H \subset \mathbf{P}^3$ une droite et un plan génériques. Alors

1. T est dite *déterminantielle* s'il existe une matrice à coefficients dans les formes linéaires sur k^4

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix},$$

avec mineurs 3×3 (considérés avec leur signe) notés $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, telle que

$$T = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4];$$

2. T est dite de *de Jonquières* si $\widetilde{T^{-1}(L)}$ est une courbe cubique plane;
3. T est dite *réglée* si $\widetilde{T^{-1}(H)}$ est une surface cubique réglée.

On note $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ les ensembles des transformations de bidegré (3,3) qui sont déterminantielles, de de Jonquières et réglées respectivement.

Voici le résultat principal de ce travail, qui est démontré plus loin au § 3.

THÉORÈME 1.2. $\mathbf{T}_{3,3} = \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$.

2. EXEMPLES

EXEMPLE 2.1. Comme on l'a vu, l'application rationnelle

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz]$$

est de Cremona de bidegré $(3, 3)$. On constate qu'elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \\ -w & -w & -w \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2.2. L'application rationnelle

$$T = [xz^2, yz^2, zw^2, w^3]$$

est une transformation de bidegré (3,3) avec inverse

$$T^{-1} = [xw^2, yw^2, z^3, z^2w].$$

C'est une transformation réglée: en effet, le transformé strict d'un plan générique a l'équation

$$z^2(ax + by) + w^2(cz + dw) = 0,$$

qui est évidemment l'équation d'une surface réglée.