

# 1. Le résultat principal

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Observer que dans l'ouvert  $xyzw \neq 0$ , on a

$$T = \left[ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w} \right],$$

d'où  $T = T^{-1}$ .

Ces transformations ont été l'objet d'études détaillées, voir [1], [3], [7], [8], [9], [16] et plus récemment [12]. Ici on utilise la théorie de la liaison des courbes algébriques ([11], [14]) pour classer ces transformations en trois types; on donne quelques exemples et à la fin on fait le lien avec les travaux classiques.

### 1. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit  $T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$  une transformation de Cremona. On choisit des ouverts non vides  $U$  et  $V$  de  $\mathbf{P}^3$  tels que la restriction de  $T$  à  $U$  induise un isomorphisme

$$\tau: U \rightarrow V.$$

Soit  $Z \subset \mathbf{P}^3$  une sous-variété linéaire. Si  $Z$  est *générique*, alors  $Z \cap V \neq \emptyset$  et  $\overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$  est une sous-variété qui ne dépend pas du choix de  $U$  et  $V$ : on l'appelle *transformée stricte* de  $Z$  par  $T$  et on la note  $\widetilde{T^{-1}(Z)} := \overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$ .

Par définition, le degré  $\deg(T)$  de  $T$  est le degré du transformé strict d'un plan générique. Si  $L$  est une droite générique, on peut supposer que  $L$  ne rencontre pas le lieu d'indétermination de  $T^{-1}$  et dans ce cas, la restriction de  $T^{-1}$  à  $L$  est décrite par un système linéaire sans points base de degré égal au degré de  $T^{-1}$ ; il s'ensuit que  $\deg(T^{-1})$  est égal au degré de  $\widetilde{T^{-1}(L)}$  (voir aussi [7, chap.IX, §3]).

On note  $\mathbf{T}_{3,3}$  l'ensemble des transformations de Cremona de bidegré (3,3). La transformée stricte d'une droite générique par une telle transformation est donc une cubique rationnelle: c'est ou bien une cubique gauche, ou bien une cubique plane singulière.

DÉFINITIONS 1.1. Soit  $T \in \mathbf{T}_{3,3}$  et  $L, H \subset \mathbf{P}^3$  une droite et un plan génériques. Alors

1.  $T$  est dite *déterminantielle* s'il existe une matrice à coefficients dans les formes linéaires sur  $k^4$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix},$$

avec mineurs  $3 \times 3$  (considérés avec leur signe) notés  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ , telle que

$$T = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4];$$

2.  $T$  est dite de de Jonquières si  $\widetilde{T^{-1}(L)}$  est une courbe cubique plane;
3.  $T$  est dite réglée si  $\widetilde{T^{-1}(H)}$  est une surface cubique réglée.

On note  $\mathbf{T}_{3,3}^D$ ,  $\mathbf{T}_{3,3}^J$ ,  $\mathbf{T}_{3,3}^R$  les ensembles des transformations de bidegré (3,3) qui sont déterminantielles, de de Jonquières et réglées respectivement.

Voici le résultat principal de ce travail, qui est démontré plus loin au §3.

THÉORÈME 1.2.  $\mathbf{T}_{3,3} = \mathbf{T}_{3,3}^D \cup \mathbf{T}_{3,3}^J \cup \mathbf{T}_{3,3}^R$ .

## 2. EXEMPLES

EXEMPLE 2.1. Comme on l'a vu, l'application rationnelle

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz]$$

est de Cremona de bidegré (3,3). On constate qu'elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \\ -w & -w & -w \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2.2. L'application rationnelle

$$T = [xz^2, yz^2, zw^2, w^3]$$

est une transformation de bidegré (3,3) avec inverse

$$T^{-1} = [xw^2, yw^2, z^3, z^2w].$$

C'est une transformation réglée: en effet, le transformé strict d'un plan générique a l'équation

$$z^2(ax + by) + w^2(cz + dw) = 0,$$

qui est évidemment l'équation d'une surface réglée.