§1. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 355–380

ÉQUISINGULARITÉ DANS LES PINCEAUX DE GERMES DE COURBES PLANES ET C^0-SUFFISANCE

par LÊ Dung Trang et Claude WEBER [1])

§ 1. INTRODUCTION

Soient f_0 et f_1 deux germes de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^2$. On suppose que les deux germes s'annulent à l'origine et sont à singularité isolée. Traditionnellement on dit que f_0 et f_1 sont *topologiquement équivalents* s'il existe un germe d'homéomorphisme $\Phi\colon (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ de degré $+1$, tel que l'on ait $f_0 \circ \Phi = f_1$.

On peut démontrer que les deux germes sont topologiquement équivalents si et seulement si les entrelacs orientés qui leur sont associés dans une petite sphère de Milnor sont isotopes. Voir [Saeki] et les références qui s'y trouvent.

Dans [E-N] D. Eisenbud et W. Neumann donnent une façon de coder l'entrelacs de Milnor associé à un germe f par un diagramme d'épissure (« splicing diagram »), qui est une version plus élaborée des anciens câblages.

Une autre façon de se donner le type topologique de l'entrelacs de Milnor consiste à utiliser l'arbre de la résolution minimale de f. Ce faisant, on décrit la configuration du lieu exceptionnel de la résolution en indiquant comment les composantes irréductibles se coupent et quelle est la self-intersection de chaque composante. On indique en plus, par des flèches en quantité adéquate, combien de fois chaque composante est coupée par la transformée stricte de $f = 0$. Pour plus de détails voir [B-K].

Dans tout ceci, le fait que les germes sont à singularité isolée n'est pas essentiel. Pour décrire la topologie d'un germe à singularité non isolée il convient d'indiquer pour chaque composante de l'entrelacs (resp. pour

[1]) Les auteurs remercient le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique de son soutien financier.

chaque flèche) quelle est la multiplicité d'un point générique de la branche correspondante dans l'équation $f = 0$. Ceci conduit aux entrelacs pondérés (« multilinks » chez Eisenbud-Neumann).

Soient maintenant $h_1 = 0$ et $h_2 = 0$ deux germes de courbes planes s'annulant à l'origine, sans branche commune. La famille de germes de courbes planes $w_2 h_1 - w_1 h_2 = 0$ avec $w = (w_1 : w_2) \in \mathbf{P}^1$ est par définition le *pinceau de germes de courbes planes* engendré par h_1 et h_2. Un cas particulier d'un théorème général sur les déformations (dû à O. Zariski) affirme qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $\Omega \subset \mathbf{P}^1$ tel que les éléments correspondants du pinceau ont tous la même topologie. L'ouvert maximal ayant cette propriété s'appelle *l'ouvert d'équisingularité du pinceau*, tandis que son complémentaire est l'ensemble (fini) des *valeurs spéciales*.

Dans la première partie de ce travail, nous énonçons et démontrons un théorème (théorème 4.1) qui caractérise explicitement l'ensemble des valeurs spéciales en fonction de la résolution minimale du pinceau. Nous décrivons la résolution minimale au paragraphe 2 et parlons des valeurs génériques au paragraphe 3. La preuve du théorème (en fait sa partie la plus facile) permet de déterminer explicitement la topologie d'un membre générique du pinceau en fonction de la topologie (colorée) de l'entrelacs associé à $h_1 h_2 = 0$. Voir la remarque à la fin du §3.

La deuxième partie de ce travail (basée sur la première) est consacrée au degré de C^0-suffisance d'un germe de courbe plane. Voici de quoi il s'agit. Soit $f \in \mathbf{C}\{X, Y\}$ avec $f(0) = 0$. Le jet d'ordre r de f, noté $j^{(r)}(f)$, est dit topologiquement suffisant si, quel que soit $g \in \mathfrak{m}^{r+1}$, le germe f est topologiquement équivalent au germe $f + g$. Bien sûr, il existe une définition analogue pour les germes à n variables. Le *degré de C^0-suffisance* $\mathrm{Suff}(f)$ de f est le minimum des r tels que le jet $j^{(r)}(f)$ est topologiquement suffisant.

Soit maintenant $\pi \colon \Sigma \to \mathbf{C}^2$ la résolution minimale de f. Soit $E = \pi^{-1}(0)$ le lieu exceptionnel de la résolution. Choisissons une composante irréductible D de E. Une *curvette* de D en un point $P \in D$ lisse dans la transformée totale de $f = 0$ est un germe γ en P de courbe lisse et transverse à D. Ce germe est la transformée stricte d'une branche (c'est-à-dire d'une composante analytiquement irréductible) γ_* en l'origine de $\mathbf{C}^2$.

Par définition, le *quotient d'Hironaka* q_D de D est le nombre rationnel positif égal à $I(f = 0, \gamma_*)/I(\lambda, \gamma_*)$ où λ est une droite transverse à $f = 0$ et à γ_*. Ici $I(-, -)$ désigne le nombre d'intersection de deux germes à l'origine. Il est facile de voir que ce nombre ne dépend que de la composante D.

DÉFINITION. Une composante D de E est appelée une *composante de rupture* si elle rencontre au moins trois composantes de la transformée totale de $f=0$ par π.

Le calcul du degré de C^0-suffisance est établi par le théorème suivant.

THÉORÈME 7.3. *Supposons que f est à singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. Alors* Suff(f) *est égal au maximum des parties entières* $[q_D]$ *où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de E.*

REMARQUE. Le théorème 3.2 de [L-M-W2] (que nous appellerons théorème de croissance) implique qu'il suffit pour calculer Suff(f) de considérer les composantes de rupture D qui contiennent au moins un point de contact de la transformée stricte de $f=0$. Le nombre de composantes D à considérer est donc inférieur ou égal au nombre de branches de f. En particulier, il n'y a qu'un seul quotient d'Hironaka à calculer si f est analytiquement irréductible.

Notre approche est basée sur l'idée suivante (tellement simple qu'elle peut sembler trop naïve). Nous cherchons des conditions sur la multiplicité de g pour que les germes $f-\lambda g=0$ du pinceau $\eta f-\lambda g=0$ aient la même topologie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Pour cela, nous utilisons à fond la détermination de l'ouvert d'équisingularité faite dans la première partie de ce travail.

§2. ÉLIMINATION DE L'INDÉTERMINATION LOCALE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE À DEUX VARIABLES

Soit U un domaine (=ouvert connexe) de $\mathbf{C}^2$ contenant l'origine. Soient h_1 et $h_2\colon U \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes, avec $h_i(0)=0$ pour $i=1,2$. On suppose que l'origine est le seul zéro commun à h_1 et h_2 dans U.

Ceci étant posé, on considère la fonction $h=\frac{h_1}{h_2}$. La fonction méromorphe h est définie en tout point $z \in U$ différent de l'origine et peut être interprétée comme une application $h\colon U \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ définie par $h(z)=\big(h_1(z):h_2(z)\big)$.

Pour chaque $w \in \mathbf{P}^1$, l'équation $w_2h_1-w_1h_2=0$ définit un germe de courbe plane que l'on désignera par $h(z)=w$ ou par $h^{-1}(w)$. L'ensemble des germes $h(z)=w$ pour $w \in \mathbf{P}^1$ est le pinceau (local) de germes de courbes planes associé à la fonction méromorphe h.