§2. ÉLIMINATION DE L'INDÉTERMINATION LOCALE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE À DEUX VARIABLES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

DÉFINITION. Une composante D de E est appelée une *composante de rupture* si elle rencontre au moins trois composantes de la transformée totale de $f = 0$ par π.

Le calcul du degré de C^0-suffisance est établi par le théorème suivant.

THÉORÈME 7.3. *Supposons que f est à singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. Alors* Suff(f) *est égal au maximum des parties entières* $[q_D]$ *où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de E.*

REMARQUE. Le théorème 3.2 de [L-M-W2] (que nous appellerons théorème de croissance) implique qu'il suffit pour calculer Suff(f) de considérer les composantes de rupture D qui contiennent au moins un point de contact de la transformée stricte de $f = 0$. Le nombre de composantes D à considérer est donc inférieur ou égal au nombre de branches de f. En particulier, il n'y a qu'un seul quotient d'Hironaka à calculer si f est analytiquement irréductible.

Notre approche est basée sur l'idée suivante (tellement simple qu'elle peut sembler trop naïve). Nous cherchons des conditions sur la multiplicité de g pour que les germes $f - \lambda g = 0$ du pinceau $\eta f - \lambda g = 0$ aient la même topologie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Pour cela, nous utilisons à fond la détermination de l'ouvert d'équisingularité faite dans la première partie de ce travail.

§2. ÉLIMINATION DE L'INDÉTERMINATION LOCALE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE À DEUX VARIABLES

Soit U un domaine (=ouvert connexe) de $\mathbf{C}^2$ contenant l'origine. Soient h_1 et h_2: $U \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes, avec $h_i(0) = 0$ pour $i = 1, 2$. On suppose que l'origine est le seul zéro commun à h_1 et h_2 dans U.

Ceci étant posé, on considère la fonction $h = \frac{h_1}{h_2}$. La fonction méromorphe h est définie en tout point $z \in U$ différent de l'origine et peut être interprétée comme une application h: $U \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ définie par $h(z) = \big(h_1(z) : h_2(z)\big)$.

Pour chaque $w \in \mathbf{P}^1$, l'équation $w_2 h_1 - w_1 h_2 = 0$ définit un germe de courbe plane que l'on désignera par $h(z) = w$ ou par $h^{-1}(w)$. L'ensemble des germes $h(z) = w$ pour $w \in \mathbf{P}^1$ est le pinceau (local) de germes de courbes planes associé à la fonction méromorphe h.

Une *modification* de U (au-dessus de l'origine) est pour nous une composition de morphismes d'éclatements de points dont les centres se projettent sur l'origine. Une modification $\rho\colon \widehat{U} \to U$ telle que $h \circ \rho$ est un morphisme (c'est-à-dire est définie partout) est, par définition, une résolution de h. On dit aussi que ρ lève l'indétermination de h. En termes de pinceaux, dire que ρ est une résolution signifie que les courbes $(h \circ \rho)^{-1}(w)$ et $(h \circ \rho)^{-1}(w')$ sont disjointes si w est distinct de w'. Autrement dit, on a « résolu » la famille de germes $\{h(z) = w\}$ dans l'ancien sens du verbe « résoudre » qui veut dire « diviser en ses parties constituantes ».

Nous allons montrer que, pour toute fonction méromorphe telle que h, il existe des résolutions. Parmi celles-ci, il y en a une qui est minimale et que nous décrirons. Un tel énoncé est connu depuis des décennies. Nous en proposons une démonstration qui a l'avantage d'être géométriquement très explicite. La démonstration elle-même joue un rôle clef dans la suite de ce travail.

Pour l'instant, considérons une modification quelconque $\rho\colon \widehat{U} \to U$. L'ensemble $\rho^{-1}(0)$ est appelé le *lieu exceptionnel* de la modification. Soit D une composante irréductible du lieu exceptionnel. Pour $i = 1, 2$ on définit $v_i(D)$ comme étant la multiplicité de $h_i \circ \rho$ le long de D. Posons $v(D) = v_1(D) - v_2(D)$. Si $v(D)$ est strictement positif, D appartient au support du diviseur Z des zéros de $h \circ \rho$. Si $v(D)$ est strictement négatif, D appartient au diviseur P des pôles de $h \circ \rho$. Autrement dit, on a $(h \circ \rho) = (h_1 \circ \rho) - (h_2 \circ \rho) = Z + P$. Une composante D du lieu exceptionnel de ρ est dite *dicritique* si la restriction $h \circ \rho|_D$ est non constante. Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que D soit dicritique est que $v(D)$ soit égal à zéro. Si $v(D) = 0$ sans que D soit dicritique, la restriction de la fonction $h \circ \rho$ à D est constante, de valeur différente de 0 et de l'infini ∞.

PROPOSITION 2.1. *Il existe une résolution de h.*

Preuve de la proposition 2.1. Considérons la fonction holomorphe $h_1 h_2\colon U \to \mathbf{C}$. Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ une modification de U qui résout la singularité de $h_1 h_2$ à l'origine. Voir par exemple [B-K] §8.4. Soit $\big((h_1 h_2) \circ \rho\big)^{-1}(0)$ la transformée totale et soit S son support. Les points d'indétermination de $h \circ \rho$ sont situés au point d'intersection Q de deux composantes S_1 et S_2 de S pour lesquelles on a $v(S_1) > 0$ et $v(S_2) < 0$. Définissons alors la complexité du point Q comme étant $c(Q) = |v(S_1) + v(S_2)|$. Éclatons le point Q. Soit

S_3 le lieu exceptionnel de ce nouvel éclatement et soit ρ' la projection de l'éclatement de Q suivie de ρ. Soit $v(S_3)$ la multiplicité de la fonction $h \circ \rho'$ le long de S_3. On a $v(S_3) = v(S_1) + v(S_2)$. Soit Q_i le point d'intersection de (la transformée stricte de) S_i avec S_3 pour $i = 1, 2$.

Si $v(S_3) = 0$, aucun des deux points Q_i n'est d'indétermination (et en fait S_3 est une composante dicritique). Si $v(S_3) > 0$ alors Q_2 est un point d'indétermination; tandis que si $v(S_3) < 0$ c'est Q_1 qui est d'indétermination. Mais, de toute façon, la complexité du nouveau point d'indétermination est strictement inférieure à $c(Q)$.

En un nombre fini d'éclatements on résout donc la singularité en Q. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points d'indétermination tels que Q, ceci achève la preuve de la proposition 2.1.

Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ une résolution de h et soit Δ l'ensemble de ses composantes dicritiques.

DÉFINITION. Une résolution de h est dite *minimale* si les composantes du lieu exceptionnel qui n'appartiennent pas à Δ sont de self-intersection différente de -1.

Supposons que la résolution $\rho\colon \widehat{U} \to U$ de h n'est pas minimale. Soit D une composante du lieu exceptionnel dont la self-intersection vaut -1. Par définition, la restriction de $h \circ \rho$ à D est constante. Par conséquent, la modification $\rho'\colon U' \to U$ obtenue à partir de ρ en contractant D est encore une résolution de h. En revanche, on n'aurait plus une résolution de h si l'on contractait une composante dicritique de self-intersection -1. En effet, le point image du dicritique dans le contracté est un point d'indétermination puisque la restriction de la fonction au dicritique est non-constante.

PROPOSITION 2.2. *Il existe une résolution minimale et cette résolution est unique à isomorphisme près.*

Preuve de la proposition 2.2. L'existence résulte immédiatement de ce que nous venons de faire. En effet, il suffit de prendre la résolution fournie par la preuve de la proposition précédente et de contracter, tant qu'il en reste, les composantes non dicritiques de self-intersection -1. (La résolution construite dans la preuve de la proposition précédente n'est pas nécessairement minimale.)

L'unicité résulte d'arguments bien connus de la théorie des surfaces complexes. Une bonne référence est fournie par le livre de H. Laufer; voir [La] à partir de la page 87. Le fait que l'auteur s'intéresse à la résolution des singularités normales de surfaces plutôt qu'à la résolution des fonctions méromorphes n'est pas essentiel. □

REMARQUE. Le théorème d'unicité permet de donner un sens à la phrase suivante: «Deux résolutions de h ont les "mêmes" composantes dicritiques». En effet, on passe d'une résolution à une autre par une suite finie d'éclatements et de contractions sans toucher aux composantes dicritiques.

§3. VALEURS SPÉCIALES D'UN PINCEAU DE GERMES DE COURBES PLANES

Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ la résolution minimale de la fonction méromorphe h. Posons $\hat{h} = h \circ \rho$.

DÉFINITION. L'ensemble (fini) des *valeurs spéciales* de h est formé:

i) des valeurs $\hat{h}|_{D_a}$ où D_a parcourt l'ensemble des composantes non dicritiques de $E = \rho^{-1}(0)$. Remarquer que la restriction de $\hat{h}$ à D_a est constante par définition.

ii) des valeurs critiques de $\hat{h}|_{D_b}$ où D_b parcourt l'ensemble des composantes dicritiques de E.

iii) des valeurs $\hat{h}(Q)$ où Q est un point d'intersection entre deux dicritiques.

Par définition une valeur non spéciale est *générique*. Si w est une valeur générique, le germe de courbe $h^{-1}(w)$ est, par définition, un membre générique du pinceau. Sinon, c'est un membre spécial.

AFFIRMATION 1. *N'importe quelle résolution de h est une résolution du germe de courbe $h^{-1}(w)$ pour w générique.*

En fait on a mieux: