Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUISINGULARITÉ DANS LES PINCEAUX DE GERMES DE COURBES PLANES ET C^0-SUFFISANCE

Autor: Trang, LÊ Dung / WEBER, Claude

Kapitel: §3. Valeurs spéciales d'un pinceau de germes de courbes planes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63285

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'unicité résulte d'arguments bien connus de la théorie des surfaces complexes. Une bonne référence est fournie par le livre de H. Laufer; voir [La] à partir de la page 87. Le fait que l'auteur s'intéresse à la résolution des singularités normales de surfaces plutôt qu'à la résolution des fonctions méromorphes n'est pas essentiel. □

REMARQUE. Le théorème d'unicité permet de donner un sens à la phrase suivante: «Deux résolutions de h ont les "mêmes" composantes dicritiques». En effet, on passe d'une résolution à une autre par une suite finie d'éclatements et de contractions sans toucher aux composantes dicritiques.

§3. VALEURS SPÉCIALES D'UN PINCEAU DE GERMES DE COURBES PLANES

Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ la résolution minimale de la fonction méromorphe h. Posons $\hat{h} = h \circ \rho$.

DÉFINITION. L'ensemble (fini) des *valeurs spéciales* de h est formé:

i) des valeurs $\hat{h}|_{D_a}$ où D_a parcourt l'ensemble des composantes non dicritiques de $E = \rho^{-1}(0)$. Remarquer que la restriction de $\hat{h}$ à D_a est constante par définition.

ii) des valeurs critiques de $\hat{h}|_{D_b}$ où D_b parcourt l'ensemble des composantes dicritiques de E.

iii) des valeurs $\hat{h}(Q)$ où Q est un point d'intersection entre deux dicritiques.

Par définition une valeur non spéciale est *générique*. Si w est une valeur générique, le germe de courbe $h^{-1}(w)$ est, par définition, un membre générique du pinceau. Sinon, c'est un membre spécial.

AFFIRMATION 1. *N'importe quelle résolution de h est une résolution du germe de courbe $h^{-1}(w)$ pour w générique.*

En fait on a mieux:

AFFIRMATION 2. *N'importe quelle résolution de h est une résolution de n'importe quel germe $\bigcup_{i=1}^{m} h^{-1}(w^i)$ où les w^i sont m valeurs génériques deux à deux distinctes.*

Preuve des deux affirmations. Si w est une valeur générique, par définition $(\hat{h})^{-1}(w)$ ne rencontre aucune composante D_a non dicritique. Soit alors D_b une composante dicritique et soit $z \in D_b$ un point d'intersection de $(\hat{h})^{-1}(w)$ avec D_b. En vertu de la condition iii) portant sur les valeurs spéciales, le point z est un point lisse de D_b dans E. Comme la restriction $\hat{h}|_{D_b}$ n'a pas de point critique en z, la courbe $(\hat{h})^{-1}(w))$ est lisse et transverse à D_b en z.

Le même argument démontre aussi l'affirmation 2, car si w est distinct de w' les points de contact de $(\hat{h})^{-1}(w)$ avec D_b sont nécessairement distincts de ceux de $(\hat{h})^{-1}(w')$ avec D_b puisque $\hat{h}$ n'a plus de point d'indétermination.

L'affirmation suivante se démontre en suivant un raisonnement semblable.

AFFIRMATION 3. *La résolution minimale de h est la résolution minimale d'un germe $h^{-1}(w) \cup h^{-1}(w')$ où w et w' sont deux valeurs génériques distinctes.*

REMARQUE. Nous venons de voir que la résolution minimale de h est (entre autres choses) une résolution de n'importe quel germe générique. En revanche, elle n'est pas nécessairement une résolution d'un germe spécial. Maintenant, supposons que h_1 et h_2 sont des germes génériques du pinceau. Alors la résolution construite dans la preuve de la proposition 2.1 est la résolution minimale de h si l'on démarre avec la résolution minimale de h_1h_2. Si le germe h_1 (et/ou le germe h_2) est spécial, la résolution de la proposition 2.1 n'est pas nécessairement minimale. A posteriori, on constate qu'elle l'est si et seulement si h_1 (et/ou h_2) sont résolus par la résolution minimale de h).

Soit maintenant $\rho\colon \widehat{U} \to U$ la résolution minimale de h construite au paragraphe 2.

PROPOSITION 3.1. *Les composantes dicritiques de* $E = \rho^{-1}(0)$ *sont les composantes* D *telles que:*

1. $v(D) = 0$.

2. D *rencontre au moins une composante* D' *de support de* Z *et une composante* D'' *du support de* P.

Preuve. Les conditions sont nécessaires. En effet, si D est dicritique, D ne peut appartenir ni au support des zéros ni au support des pôles, ce qui implique que $v(D) = 0$. Comme la restriction de $\hat{h}$ à une composante dicritique D est nécessairement surjective (puisque non constante et holomorphe) la valeur 0 et la valeur ∞ sont prises par $\hat{h}|_D$.

Réciproquement, nous savons déjà que $v(D) = 0$ implique soit que D est dicritique, soit que la restriction $\hat{h}|_D$ est constante et de valeur distincte de 0 ou de ∞. La condition 2 rend impossible la deuxième branche de l'alternative. □

REMARQUES.

1) La preuve indique que la composante D est dicritique si et seulement si $v(D) = 0$ et D rencontre le support de Z ou le support de P.

2) La proposition précédente a un certain intérêt pratique. Il est facile en effet de construire des fonctions méromorphes où toutes les composantes du lieu exceptionnel de la résolution minimale ont valuation v nulle.

La remarque suivante est une parenthèse dans cet article. Elle résulte immédiatement du paragraphe 2 et de la proposition précédente.

REMARQUE. Soient h_1 et $h_2 \colon U \to \mathbf{C}$ comme au §2. Tautologiquement, h_1 et h_2 déterminent le pinceau qu'elles engendrent ! Mais ce que nous venons de faire démontre ceci. La topologie locale de $h_1 h_2 = 0$ (où l'on colore les composantes de $h_1 = 0$ d'une certaine couleur et celles de $h_2 = 0$ d'une autre couleur; nous parlerons dans ces circonstances de *topologie colorée*) détermine la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. Par h_{gen} on désigne un membre générique du pinceau (équipé d'une troisième couleur). De plus le procédé que nous avons donné est effectif. Entre autres choses, la topologie de h_{gen} peut être déterminée effectivement à partir de la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$. De même, la topologie colorée de $h_1 h_2 h^1_{\text{gen}} \dots h^m_{\text{gen}} = 0$ est déterminée, où les h^i_{gen} sont m membres génériques, deux à deux distincts, du pinceau. Finalement, observons que tout ceci fonctionne si les générateurs h_i $(i = 1, 2)$ du pinceau ne sont pas réduits.

Nous conseillons au lecteur de faire des tests sur quelques exemples. Voir aussi le paragraphe 6 (surtout la fin).