§6. Étude d'un cas particulier

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Dans le paragraphe 7, nous déterminons le degré de C^0-suffisance d'un germe f en cherchant à quelle condition sur la multiplicité de g les composantes dicritiques de $h = \frac{f}{g}$ sont toutes bonnes.

§6. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

Considérons le germe de fonction méromorphe donné par $k(x,y) = \frac{x^v}{y^u}$ où u et v sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. La résolution minimale de $k(x,y)$ est donnée par la processus suivant. On écrit $u = ru'$ et $v = rv'$ avec $\mathrm{pgcd}(u',v') = 1$. On construit l'approximation lente de $\frac{u'}{v'}$. Pour plus de détails sur ce procédé, voir [L-M-W2] début de l'appendice. Le point de départ est fourni par le développement en fraction continue de $\frac{u'}{v'}$ donné par:

$$u'/v' = h^0 + \cfrac{1}{h^1 + \cfrac{1}{h^2 + \cdots + \cfrac{1}{h^s}}}$$

où l'on a $0 \leq h^0$, $1 \leq h^i$ pour $1 \leq i \leq s-1$, $2 \leq h^s$. Posons $m = \sum_{i=0}^{s} h^i$.

LEMME 6.1.

1. *Il y a exactement une composante dicritique et c'est la composante obtenue après m éclatements. Elle correspond précisément au nombre rationnel $\frac{u'}{v'}$ de l'approximation lente.*

2. *La transformée stricte de $y^u = 0$ est une curvette de la composante qui correspond au sommet le plus à gauche. La transformée stricte de $x^v = 0$ est une curvette du sommet le plus à droite.*

3. *Le degré de la restriction de $\hat{k}$ à la composante dicritique est égal à* $r = \mathrm{pgcd}(u,v)$.

4. *Les sommets qui sont à gauche de la composante dicritique ont valuation < 0 tandis que ceux qui sont à droite ont valuation > 0.*

Conséquence du lemme 6.1 (importante pour la suite). La composante dicritique est bonne si et seulement si $u = 1$. En effet $u = 1$ est équivalent à:

1. $r = 1$, i.e. le degré de la restriction de $\hat{k}$ au dicritique est égal à 1.

2. Les composantes du lieu exceptionnel qui rencontrent le dicritique ont valuation < 0 (en fait il n'y a qu'une composante du lieu exceptionnel qui rencontre le dicritique).

Preuve du lemme 6.1. On observe qu'il ne s'agit de rien d'autre que de construire la résolution de $x^v - y^u = 0$. Concrètement, en utilisant les calculs du début de l'appendice de [L-M-W2] on vérifie qu'en un sommet $\frac{a}{b}$ de l'approximation lente, la valuation de $\hat{k}$ sur la composante qui correspond à ce sommet vaut $av - bu$. Elle s'annule donc uniquement au sommet $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$. Les sommets qui sont à droite de $\frac{u'}{v'}$ satisfont l'inégalité $\frac{u'}{v'} < \frac{a}{b}$ tandis que ceux qui sont à gauche satisfont $\frac{a}{b} < \frac{u'}{v'}$. □

Utilisation du lemme 6.1. Revenons au paragraphe 2 et à la méthode proposée pour éliminer les indéterminations de $h = \frac{h_1}{h_2}$. Dans la résolution minimale de $h_1 h_2 = 0$ les éventuels points d'indétermination se trouvent au point d'intersection du diviseur Z des zéros avec le diviseur P des pôles. Localement, la situation est exactement celle du lemme. On obtient donc une résolution de h en insérant à la place du point d'indétermination le lieu exceptionnel donné par le lemme 6.1. Le point 2 du lemme dit exactement comment se fait le recollement. L'entier $-u$ est le coefficient dans P de la composante de P qui passe par le point d'indétermination tandis que v est le coefficient de la composante de Z qui passe par le point d'indétermination. Ceci complète ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 3. Connaissant la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$ (par exemple via sa résolution minimale) on peut déterminer *effectivement* la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. En effet, la valuation de $\hat{h}$ le long de chaque composante du lieu exceptionnel se calcule par les moyens habituels. Elle peut, par exemple, se ramener à un calcul de coefficients d'enlacement. Ensuite, chaque point d'indétermination est remplacé par le segment décrit par le lemme 6.1. Finalement, on obtient une résolution de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$ en ajoutant, en plus des flèches colorées de $h_1 h_2 = 0$ des flèches d'une troisième couleur à chaque dicritique D_b en nombre égal au degré de l'application $\hat{h}|_{D_b} \to \mathbf{P}^1$.

§7. Le calcul du degré de C^0-suffisance

Soit $\pi \colon \Sigma \to U$ la résolution minimale de f. Soit D une composante irréductible de $\pi^{-1}(0)$ et soit γ une curvette de D. Rappelons qu'il s'agit d'un germe de courbe lisse, transverse à D en un point de D qui est lisse dans la transformée totale de $f = 0$ par π. Par définition, le *quotient d'Hironaka* q_D de D est le nombre rationnel $q_D = I(f, \gamma_*)/I(l, \gamma_*)$; dans cette formule l représente une droite transverse à $f = 0$ et γ_* est l'image de γ par π (voir le paragraphe 1).