

1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THE NORMALISER ACTION AND STRONGLY MODULAR LATTICES

by Gabriele NEBE *)

ABSTRACT. We derive group theoretical methods to test if a lattice is strongly modular. We then apply these methods to the lattices of rational irreducible maximal finite groups.

1. INTRODUCTION

Let $L \subseteq \mathbf{R}^d$ be an even integral lattice in the Euclidean space of dimension d and let $L^\# \subseteq \mathbf{R}^d$ be its dual lattice. Let $\pi(L)$ be the set of all intermediate lattices $L \leq L' \leq L^\#$ that are inverse images of sums of Sylow subgroups of the finite abelian group $L^\#/L$. Then, L is said to be *strongly modular* if L is similar to L' for all $L' \in \pi(L)$ (cf. [Que 96]). Recall that L and L' are called *similar* if there exists $s \in GL(\mathbf{R}L)$ and $a \in \mathbf{R}_{>0}$ such that $Ls = L'$ and $(vs, ws) = a(v, w)$ for all $v, w \in \mathbf{R}L$, where $(,)$ denotes the Euclidean scalar product.

The automorphism group

$$G := \text{Aut}(L) = \{g \in O(\mathbf{R}L) \mid Lg \subseteq L\}$$

is conjugate to a finite subgroup of $GL_d(\mathbf{Z})$. Since G acts as group automorphisms on $L^\#/L$ it preserves the lattices $L' \in \pi(L)$.

In Section 3 it is shown that the similarities $L' \rightarrow L$ normalise G . So one may use the normaliser

$$N_{GL_d(\mathbf{Q})}(G) := \{n \in GL_d(\mathbf{Q}) \mid n^{-1}gn \in G \text{ for all } g \in G\}$$

*) Supported by the DFG.

of G in $GL_d(\mathbf{Q})$ to test strong modularity of L . In the next section we derive some methods for explicitly constructing elements of $N_{GL_d(\mathbf{Q})}(G)$.

Every finite subgroup of $GL_d(\mathbf{Q})$ is a subgroup of the automorphism group of an integral lattice. In particular the maximal finite subgroups of $GL_d(\mathbf{Q})$ are automorphism groups of distinguished lattices. A subgroup of $GL_d(\mathbf{Q})$ is called rational irreducible if it does not preserve a proper subspace $\neq \{0\}$ of \mathbf{Q}^d . The rational irreducible maximal finite, abbreviated to *r.i.m.f.*, subgroups of $GL_d(\mathbf{Q})$ are classified for $d < 32$ (cf. [PIN 95], [NeP 95], [Neb 95], [Neb 96], [Neb 96a]). Their invariant lattices provide many examples of strongly modular lattices. The following theorem is proved by applying the methods derived in Section 4.

THEOREM. *In dimension $d < 32$, all even lattices $L \subseteq \mathbf{R}^d$ that are preserved by a r.i.m.f. group and satisfy $L^\# / L \cong (\mathbf{Z} / l\mathbf{Z})^{d/2}$ for some $l \in \mathbf{N}$ are strongly modular, except for the lattices of the r.i.m.f. group $[\pm \text{Alt}_6 . 2^2]_{16}$ in $GL_{16}(\mathbf{Q})$ (cf. [NeP 95]).*

2. PRELIMINARIES AND NOTATION

The main strategy in this paper is the application of the following *normaliser principle*.

Let G be a group acting on a set S , H a subgroup of the group of transformations of S . Then the normaliser of G in H acts on the set of G -orbits.

In our situation $G = \text{Aut}(L)$ is the automorphism group of an integral lattice L in the Euclidean space $\mathbf{R}L \cong \mathbf{R}^d$. By writing the action of G on $\mathbf{R}L$ with respect to a \mathbf{Z} -basis (b_1, \dots, b_d) of L , G becomes a finite subgroup of $GL_d(\mathbf{Z})$. Then $G = \text{Aut}(F) = \{g \in GL_d(\mathbf{Z}) \mid gFg^{tr} = F\}$ where F is the Gram matrix $F = ((b_i, b_j))_{i,j=1}^d$ of L .

For the rest of this article let $H = GL_d(\mathbf{Q})$, $G \leq H$, be a finite subgroup of H , and let $N := N_H(G)$ be its normaliser. We also assume that G contains the negative unit matrix, $-I_d \in G$.

We apply the normaliser principle to the following three situations.

- (i) $S = \{L \subseteq \mathbf{Q}^d \mid L = \sum_{i=1}^d \mathbf{Z}b_i \text{ for a basis } (b_1, \dots, b_d) \text{ of } \mathbf{Q}^d\}$, the set of \mathbf{Z} -lattices of rank d in \mathbf{Q}^d , and the action of H on S is right multiplication: $S \times H \rightarrow S$, $(L, h) \mapsto Lh := \{lh \mid l \in L\}$. Then the set of G -fixed points is

$$\mathcal{Z}(G) := \{L \in S \mid Lg = L \text{ for all } g \in G\},$$

the set of G -invariant lattices.