

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE KATO POUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 2

Autor(en): **Szamuely, Tamás**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-63273>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE KATO
POUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 2

par Tamás SZAMUELY

Nous nous proposons ici de donner une exposition complète (dans le cas premier à la caractéristique résiduelle) d'un résultat de Kazuya Kato, fondamental dans la théorie des corps de classes en dimension supérieure, mais difficilement abordable dans la littérature. Il va sans dire que nous nous sommes fortement inspirés des travaux originaux ([7], [8], [9] et [14]) dont nous espérons que ce texte facilitera l'accès.

1. ÉNONCÉS

Soient A un anneau local normal complet de dimension 2, K son corps de fractions et \mathbf{F} son corps résiduel qui sera supposé *fini* dans la suite. Prenons un idéal premier \mathfrak{p} de hauteur 1, et notons $K_{\mathfrak{p}}$ le corps de fractions du hensélisé $A_{\mathfrak{p}}^h$ de A en \mathfrak{p} . (Pour tout ce qui concerne les anneaux henséliens, voir [11] et [12].) Fixons un entier positif m premier à la caractéristique de \mathbf{F} .

THÉORÈME 1. *Pour tout premier p divisant m , la p -dimension cohomologique de $K_{\mathfrak{p}}$ est 3, et on a un isomorphisme*

$$H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Plus généralement, on dit qu'un corps F est un *corps local de dimension d* si F est muni d'une valuation discrète hensélienne pour laquelle son corps résiduel est un corps local de dimension $d - 1$, un corps local de dimension 0 étant un corps fini. Donc un corps local au sens classique est un corps local complet de dimension 1 dans notre sens, et on va voir au chap. 3 que le corps $K_{\mathfrak{p}}$ du th. 1 est un corps local de dimension 2. Or, pour un m premier à la caractéristique du «plus petit» corps résiduel de F , on a le théorème général suivant.

THÉORÈME 1'. *Pour tout premier p divisant m , la p -dimension cohomologique de F est $d + 1$ et on a un isomorphisme*

$$H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes d}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Pour $d = 1$, on récupère la détermination classique de la m -torsion du groupe de Brauer d'un corps local (cf. par exemple [16], [17]). Le groupe du th. 1 joue donc un rôle analogue à celui du groupe de Brauer dans le cas classique.

Revenons maintenant à notre corps K , et soit $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$, ω_p sa restriction à $H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$. On va voir au chap. 4 que $\omega_p = 0$ pour presque tout p , on obtient donc un homomorphisme

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_p H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_p \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

où p parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 dans A . En faisant la somme suivant ces p , on obtient l'analogue suivant de la loi de réciprocité classique de Takagi-Artin (pour cette dernière, cf. [18]):

THÉORÈME 2. *La suite d'homomorphismes*

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_p H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$$

est un complexe.

REMARQUE. Tout comme le th. 1, le th. 2 admet une généralisation en dimension supérieure qui se démontre essentiellement de la même façon: supposons en fait que le corps résiduel \mathbf{F} de notre anneau A est un corps local de dimension $d - 2$ pour un $d \geq 2$. Alors on a un complexe, avec les mêmes notations:

$$H^{d+1}(K, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow \bigoplus_p H^{d+1}(K_p, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Ces théorèmes sont dus à Kazuya Kato. En fait, il a démontré beaucoup plus, car il a également traité le cas où l'entier m est divisible par la caractéristique résiduelle. Ce cas, qui nécessite de longs calculs sur le complexe de de Rham-Witt, ne sera pas examiné ici. Les deux chapitres qui suivent contiennent des rappels de résultats divers utilisés dans la suite, les preuves

des théorèmes 1 et 1' ainsi qu'une discussion superficielle de la position du th. 2 dans la théorie des corps de classes des schémas arithmétiques. Le reste de l'article est consacré à la démonstration de ce théorème.

2. PRÉPARATION

On rappelle ici quelques résultats en cohomologie galoisienne; une référence de base est le livre de Serre [15].

Si G est un groupe profini, I un sous-groupe normal fermé dans G , on a pour tout G -module discret A la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{i,j} = H^i(G/I, H^j(I, A)) \Rightarrow H^{i+j}(G, A).$$

La théorie générale des suites spectrales nous fournit maintenant le

LEMME 2.1. *Si A est un module de torsion et I est de dimension cohomologique 1, il existe un homomorphisme*

$$\partial_i : H^{i+1}(G, A) \rightarrow H^i(G/I, H^1(I, A))$$

appelé le résidu. Si, de plus, G/I est de dimension cohomologique i , cet homomorphisme est en fait un isomorphisme.

REMARQUE. En fait, pour A fixé, il suffit de supposer que I soit de p -dimension cohomologique 1 pour chaque p annulant un élément de A ; de même pour l'énoncé sur G/I .

Un calcul sur les cochaînes (cf. par exemple [5], p. 77 ainsi que [13], Appendice A) montre la compatibilité suivante entre résidus et cup-produits.

LEMME 2.2. *Soient G et I comme ci-dessus, A et B deux G -modules discrets de torsion. Alors pour tout $a \in H^i(G, A)$, $b \in H^j(G/I, H^0(I, B))$,*

$$\partial_{i+j-1}(a \cup \text{Inf}_{G/N}^G(b)) = \partial_{i-1}(a) \cup b.$$

La démonstration du théorème 1' est une application simple du lemme 2.1.

Démonstration du théorème 1'. On sait que pour un corps muni d'une valuation discrète hensélienne, le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois absolu est de p -dimension cohomologique 1 pour tout premier p différent

de la caractéristique résiduelle. (En fait, on trouve dans la littérature plusieurs démonstrations pour le cas complet, mais par exemple celle donnée par Serre en termes d'algèbres simples centrales dans [17] se transcrit immédiatement au cas hensélien.) Tenant compte de la remarque précédente, on peut donc appliquer le lemme 2.1 avec $i = d$, G le groupe de Galois absolu de F et I le groupe d'inertie, pour obtenir un résidu

$$(2.3) \quad \partial_d : H^{d+1}(G, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow H^d(G/I, H^1(I, \mu_m^{\otimes d})) \cong H^d(G/I, \mu_m^{\otimes(d-1)}).$$

En effet, on vérifie aisément que $H^1(I, \mu_m^{\otimes d}) \cong H^1(I, \mu_m) \otimes \mu_m^{\otimes(d-1)}$ en tant que G/I -modules (noter que l'action de I sur $\mu_m^{\otimes d}$ est triviale). Puis la suite de Kummer et la valuation donnent des isomorphismes $H^1(I, \mu_m) \cong F_{nr}^*/F_{nr}^{*m} \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, où F_{nr}^* est le groupe multiplicatif de l'extension maximale non ramifiée de F .

Soient maintenant $F^{(1)}$ le corps résiduel de F , $F^{(2)}$ celui de $F^{(1)}$, etc. En répétant l'argument en haut et réécrivant les groupes de cohomologie en termes de corps, on obtient (notant que $\mu_m^{\otimes 0} = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ par convention) une suite d'homomorphismes

$$H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow H^d(F^{(1)}, \mu_m^{\otimes(d-1)}) \rightarrow \dots \rightarrow H^1(F^{(d)}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z},$$

$F^{(d)}$ étant fini par hypothèse. Mais alors il est de dimension cohomologique 1, et l'application successive d'un théorème de transition en cohomologie galoisienne (Serre [15], chap. 4.3, prop. 12) et du deuxième énoncé du lemme 2.1 montrent qu'il y a isomorphisme partout.

Soit maintenant F un corps quelconque. Rappelons que le K -groupe de Milnor $K_d^M F$ est défini comme le quotient de la d -ième puissance tensorielle du groupe multiplicatif F^* par l'idéal engendré par les éléments de la forme $f_1 \otimes \dots \otimes f_d$ pour lesquels il existe $1 \leq i \neq j \leq d$ avec $f_i + f_j = 1$. (On pose $K_0^M(F) = \mathbf{Z}$.) L'image d'un élément $f_1 \otimes \dots \otimes f_d$ dans $K_d^M(F)$ sera notée $\langle f_1, \dots, f_d \rangle$.

Le lien avec la cohomologie galoisienne est donné par le symbole cohomologique de Tate

$$h_{m,F}^d : K_d^M(F)/mK_d^M(F) \rightarrow H^d(F, \mu_m^{\otimes d})$$

défini pour $d = 0$ comme l'identité de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, et pour $d \geq 1$ par cup-produit à partir du bord de la suite de Kummer. (A priori, cet homomorphisme a pour domaine $(F^*/F^{*m})^{\otimes d}$. Le fait qu'il passe au quotient par les relations est vérifié, par exemple, dans Tate [19] pour le cas typique $d = 2$.) On conjecture la bijectivité du symbole pour tout d et m . La conjecture est vérifiée dans plusieurs cas dont le plus important pour nous est le

THÉORÈME (Merkouriev-Sousline). *Le symbole $h_{m,F}^2$ est bijectif pour tout m et F .*

Notons qu'en fait nous n'utiliserons qu'un cas très particulier de ce résultat puissant, pour un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1. Ce cas peut d'ailleurs être prouvé directement en modifiant un joli argument géométrique de Bloch ([4], pp. 5.9-5.11).

Si de plus F est muni d'une valuation discrète v à corps résiduel $\kappa(v)$, il existe un homomorphisme canonique $\partial_{d,v}^M : K_{d+1}^M(F) \rightarrow K_d^M(\kappa(v))$ (cf. Bass-Tate [3]), caractérisé par la formule

$$\partial_{d,v}^M(\langle \omega, u_1, \dots, u_d \rangle) = \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d \rangle$$

où ω est une uniformisante, et les u_i sont des unités avec image \bar{u}_i dans $\kappa(v)$. Notons que la définition implique $\partial_{d,v}^M(\langle u_1, \dots, u_{d+1} \rangle) = 0$ si tous les u_i sont des unités et que $\partial_{0,v}^M$ n'est autre que la valuation v .

Supposons maintenant F hensélien par rapport à v et donnons-nous un entier m premier à la caractéristique de $\kappa(v)$. Alors on dispose d'une part du résidu de Milnor $\partial_{d,F}^M$, d'autre part du résidu ∂_d pour la cohomologie galoisienne à valeurs dans $\mu_m^{\otimes d}$. Tenant compte de l'identification (2.3), les deux sont liés de façon agréable par le symbole cohomologique.

LEMME 2.4. *Pour tout $d \geq 0$, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes(d+1)}) & \xrightarrow{\partial_d} & H^d(\kappa(v), \mu_m^{\otimes d}) \\ \uparrow h_{m,F}^{d+1} & & \uparrow h_{m,\kappa(v)}^d \\ K_{d+1}^M(F)/mK_{d+1}^M(F) & \xrightarrow{\partial_{d,v}^M} & K_d^M(\kappa(v))/mK_d^M(\kappa(v)) \end{array}$$

Démonstration. L'assertion est évidente pour $d = 0$. Mais on s'y réduit immédiatement grâce au lemme 2.2, tenant compte de la compatibilité entre cup-produits et inflations, et de l'égalité $\text{Inf}_{\kappa(v)}^F h_{m,\kappa(v)}^1(\bar{u}) = h_{m,F}^1(u)$ pour une unité u de F avec image \bar{u} dans $\kappa(v)$.

REMARQUE. Par une compatibilité triviale entre les restrictions en cohomologie et les changements de base en K -théorie, on voit qu'il est superflu de supposer F hensélien : on peut toujours passer par le hensélisé par rapport à v et le lemme reste valable.

Donnons enfin, comme promis, une explication informelle pourquoi le th. 2 s'appelle une loi de réciprocité. D'abord, quelques rappels sur la théorie classique. Si F est un corps local au sens classique, $\chi \in H^1(F, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ un caractère d'ordre m de son groupe de Galois absolu, et α un élément du groupe multiplicatif F^* , on a $\delta_m \alpha \cup \chi \in H^2(F, \mu_m) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, où δ_m est le cobord de la suite de Kummer pour la multiplication par m . Ceci définit un homomorphisme

$$\phi_F : H^1(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \text{Hom}(F^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

dont on sait (cf. [16], [17]) qu'il est le dual de l'application de réciprocité locale. Pour la théorie globale, on introduit des idèles et on définit l'application de réciprocité globale comme le produit des applications locales (on suppose ici pour simplifier qu'il n'y a pas de places réelles). Ensuite, on vérifie que le produit est en fait une somme, et que le fait que l'application passe au quotient par l'image diagonale du groupe multiplicatif de notre corps global équivaut au fait que la suite d'Albert-Brauer-Hasse-Noether pour le groupe de Brauer est un complexe (voir [18]).

Maintenant, on peut procéder de façon analogue pour le corps K du théorème 2, en remplaçant les groupes multiplicatifs par les K_2 -groupes de Milnor. Pour les localisés K_p , on accouple $\chi \in H^1(K_p, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ avec $\alpha \in K_2^M(K_p)$ pour obtenir $h_{m, K_p}^2(\alpha) \cup \chi \in H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ en utilisant le th. 1, ce qui définit comme en haut une application de réciprocité locale entre $K_2^M(K_p)$ et le groupe de Galois absolu de K_p . Ensuite, on peut définir des K_2 -idèles de K ainsi qu'une application de réciprocité globale comme le produit des applications locales; comme dans le cas classique, le fait que cette application passe au quotient par l'image diagonale de $K_2(K)$ se réduit via le symbole cohomologique à notre th. 2.

Remarquons enfin qu'en général, pour n'importe quel schéma normal, intègre, de dimension d et de type fini sur \mathbf{Z} , on peut introduire la notion de K_d -idèles et énoncer des «lois de réciprocité». Le miracle est que par passage à un sous-schéma fermé convenable et puis par localisation en des points de codimension 1 et 2, ces énoncés se réduisent respectivement à la loi de réciprocité classique et à la Remarque suivant le th. 2. Le cas local de dimension 2 est donc le cas qui, tous dévissages faits, reste à traiter, mais la formulation du cas général appartient à la théorie des «chaînes de Parshin» pour laquelle on renvoie le lecteur à [9].

3. TOUJOURS PRÉPARATION, MAIS À LA WEIERSTRASS

Ce chapitre est consacré à quelques outils d'algèbre commutative qui seront utilisés dans la suite. Le résultat fondamental est la conséquence suivante du théorème de structure pour les anneaux locaux complets.

THÉORÈME (I. S. Cohen). *Soit A un anneau local normal complet de dimension 2, à corps résiduel \mathbf{F} (non nécessairement fini). Alors A est fini sur un anneau de séries formelles de la forme $O_k[[T]]$, où O_k est l'anneau des entiers d'un corps k complet pour une valuation discrète au même corps résiduel \mathbf{F} .*

Voir Nagata [12], Cor. 31.6 pour une démonstration. Ce théorème est très utile car la structure des anneaux de la forme $O_k[[T]]$ est bien connue.

LEMME 3.1. *Soit O_k comme en haut. Alors l'anneau $O_k[[T]]$ est factoriel, et ses éléments premiers sont l'uniformisante π de O_k , ainsi que les « polynômes de Weierstrass », c'est-à-dire les polynômes irréductibles dans $O_k[T]$ de la forme $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$, où tous les a_i sont divisibles par π .*

Le lemme est une conséquence du théorème de préparation de Weierstrass. Voir, par exemple, l'ouvrage de Lang [10].

Les idéaux premiers de hauteur 1 dans $O_k[[T]]$ sont donc engendrés par l'uniformisante π ou par un polynôme de Weierstrass. Les corps résiduels correspondants sont respectivement $\mathbf{F}((T))$ ou des extensions finies du corps valué complet k , et par conséquent sont munis de valuations discrètes canoniques pour lesquelles ils sont complets. Mais il en est alors de même pour A (car il est fini sur $O_k[[T]]$), ce qui montre bien que les corps $K_{\mathfrak{p}}$ du th. 1 sont des corps locaux de dimension 2. Le théorème 1 découle donc du th. 1'.

Par ailleurs, l'anneau $O_k[[T]]$ est le complété de l'anneau local $B = O_k[T]_{(\pi, T)}$. Nous pouvons dériver du lemme 3.1 la description suivante du hensélisé B^h qui sera utilisée dans la démonstration du théorème 2.

LEMME 3.2. *L'anneau B^h est un anneau local noethérien régulier, donc factoriel, de dimension 2, dont le complété est $O_k[[T]]$. Ses éléments premiers sont l'uniformisante π et les polynômes de Weierstrass. Par conséquent, le morphisme naturel $\text{Spec } O_k[[T]] \rightarrow \text{Spec } B^h$ est bijectif, et les corps résiduels des idéaux premiers correspondants sont identiques sauf pour (0) et (π) , où le corps résiduel de $O_k[[T]]$ est le complété de celui de B^h .*

Démonstration. La première assertion résulte des propriétés générales de la hensélisation (cf. [11], Chap. 1.4) et la troisième est triviale à partir de la seconde. Pour cette dernière, on remarque d'abord que $O_k[[T]]$ étant fidèlement plat sur B^h , il suffit d'établir une bijection entre les idéaux premiers de hauteur 1 de B et ceux de $O_k[[T]]$. Dans B , ce sont des idéaux principaux engendrés par π ou par certains polynômes irréductibles de $O_k[T]$ contenus dans (π, T) . Soit f un tel polynôme. Comme $O_k[[T]]$ est fidèlement plat sur B , il existe un idéal premier de $O_k[[T]]$ au-dessus de (f) , engendré par un polynôme de Weierstrass w selon le lemme 3.1. Mais comme les polynômes de Weierstrass sont tous contenus dans B , on a forcément $f = w$, ce qui donne la bijection désirée.

4. RÉDUCTIONS

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du théorème 2. Gardons les notations du chapitre 1. Tout d'abord, *on va vérifier que $\omega_p = 0$ pour presque tous les p de hauteur 1.*

Soit X le sous-schéma ouvert de $\text{Spec} A$ obtenu en enlevant le point fermé. La suite de localisation en cohomologie étale (cf. Milne [11], Chap. III, Prop. 1.25) nous fournit par functorialité le diagramme commutatif

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

Ici la flèche verticale à droite est un isomorphisme par excision (Milne [11], Chap. III, Cor. 1.28). Quant à la flèche horizontale en bas, en continuant la suite de localisation on obtient la suite exacte

$$H^3(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Mais les termes aux deux extrémités sont nuls car A_p^h étant hensélien, sa cohomologie est la même que celle de son corps résiduel $\kappa(p)$ (cf. Artin [2], Chap. III., Thm. 4.9), ce qui est un corps de dimension cohomologique 2, on l'a vu. Ceci démontre le second isomorphisme.

Soit maintenant S un ensemble fini de points fermés de X , et considérons la suite de localisation

$$H^3(X - S, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_S^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Ici, on a $H_S^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{p \in S} H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2})$, donc par passage à la limite sur les S (ce qui est permis dans notre cas par Milne [11], Chap. III, Lemma 1.16), on a la suite exacte

$$(4.2) \quad H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_p H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

En particulier, l'image d'un élément $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par un homomorphisme $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2})$ est nulle pour presque tout p . Mais par (4.1), cette image n'est autre que la restriction $\omega_p \in H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$, et on obtient le résultat.

Ensuite, on va utiliser le théorème de Cohen pour montrer le

LEMME 4.3. *Dans l'énoncé du théorème 2, on peut supposer $A = O_k[[T]]$.*

Démonstration. Soit A comme au th. 2, et notons par \tilde{K} le corps de fractions d'un anneau de la forme $O_k[[T]]$ sur lequel A est fini selon Cohen. Alors pour tout idéal premier $\tilde{\mathfrak{p}}$ de hauteur 1 de $O_k[[T]]$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{p}}} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \text{Cor} \downarrow & & \downarrow \Sigma \text{Cor} \\ H^3(\tilde{K}, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

En effet, il existe un tel diagramme pour tous les H^i ($i \geq 0$), et il suffit de vérifier la functorialité pour $i = 0$. On peut supposer de plus que l'extension $K | \tilde{K}$ est séparable et l'assertion est alors une conséquence du théorème sur les extensions de valuations (cf. Serre [16], chap. I, §2.3).

D'autre part, par le th. 1, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ \text{Cor} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ H^3(\tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

dont la commutativité se vérifie de la même manière que l'énoncé analogue (cf. Serre, *loc. cit.*) pour le groupe de Brauer d'un corps local (de dimension 1). Ces deux diagrammes impliquent la réduction cherchée.

On suppose donc désormais $A = O_k[[T]]$.

CONVENTION. On va noter par A° le hensélisé de l'anneau $O_k[T]_{(\pi, T)}$, avec le même O_k que dans la définition de A . Son corps de fractions sera noté K° . Par contre, en général, nous continuerons de noter par B^h tout anneau qui est comme dans le lemme 3.2. Veuillez accepter toutes nos excuses pour cet inconvénient.

L'idée de la démonstration du théorème 2 est de comparer la suite d'homomorphismes figurant dans l'énoncé à un complexe auxiliaire en K -théorie de Milnor par le symbole cohomologique. Or l'image de $h_{m,K}^d$ est contenue dans $H^d(K, \mu_m^{\otimes d})$, donc pour pouvoir bénéficier de cet outil il faut remplacer $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par exemple par $H^2(K, \mu_m^{\otimes 2})$. Comme \mathbf{F} est fini, la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit un homomorphisme

$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(K^{hs}, \mu_m^{\otimes 2}))$, où K^{hs} est le corps de fractions du hensélisé strict A^{hs} . Mais cet homomorphisme n'est un isomorphisme que si K^{hs} est de p -dimension cohomologique 2 pour tout p divisant m , ce qui n'est pas clair. Par contre si l'on remplace A par A° , le corps de fractions K° du hensélisé strict le sera bien, étant un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1 (cf. Serre [15], chap. 4.3, prop. 11). La réduction suivante est donc :

LEMME 4.4. *On peut remplacer A par A° dans l'énoncé du th. 2.*

Démonstration. La suite de localisation (4.2) nous fournit par functorialité le diagramme commutatif

$$(4.5) \quad \begin{array}{ccccc} H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d^\circ} & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

où $X^\circ = \text{Spec } A^\circ - \{(\pi, T)\}$, et \mathfrak{p}° parcourt les points fermés de X° qui sont en bijection avec ceux de X selon le lemme 3.2. Tenant compte de l'identification (4.1), pour achever la réduction il suffit de montrer que l'homomorphisme vertical au milieu induit un isomorphisme $\text{Im } d^\circ \cong \text{Im } d$. Une chasse au diagramme montre alors que pour cela il suffit de voir deux choses :

- (1) Dans le diagramme (4.5), l'homomorphisme vertical à droite est injectif.
- (2) Pour tous les \mathfrak{p} et \mathfrak{p}° correspondants, l'homomorphisme naturel

$$H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

Pour prouver (1), on considère les isomorphismes

$$X \cong X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } A \cong \varprojlim (X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } R),$$

où la limite projective est prise suivant les $\text{Spec } R$, avec R un sous-anneau de A de type fini sur A° . Pour un tel anneau, le morphisme naturel $A^\circ \rightarrow R$ possède une section par le théorème d'approximation d'Artin [1], donc le morphisme $H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } R, \mu_m^{\otimes 2})$ a également une section et on obtient le résultat par passage à la limite (tenant de nouveau compte de [11], Chap. III, Lemma 1.16).

Pour (2), considérons le diagramme commutatif suivant, obtenu en superposant (4.1) et le diagramme analogue pour A° .

$$\begin{array}{ccc}
 H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_{p^\circ}^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow h \\
 H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow \cong \\
 & & H_{p^\circ}^4(\text{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \swarrow & \downarrow g \\
 & & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \swarrow & \downarrow \cong \\
 H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow f & & \downarrow \cong \\
 H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2})
 \end{array}$$

Notre tâche est de montrer que l'homomorphisme h du diagramme est un isomorphisme ce qui équivaut à dire que f l'est. Mais par le th. 1, les groupes $H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$ et $H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2})$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$; reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec f . Par construction, l'isomorphisme du th. 1 est obtenu comme le composé de deux résidus pour la suite spectrale de Hochschild-Serre, donc la compatibilité en question est évidente par functorialité.

5. CONCLUSION

Comme promis, on va maintenant construire, suivant Kato, un complexe en K -théorie de Milnor que l'on va ensuite comparer à travers le symbole cohomologique avec le complexe hypothétique du th. 2.

Soit B^h un anneau comme dans le lemme 3.2, K^h son corps de fractions. On suppose que le corps résiduel de B^h est parfait. (En fait, des hypothèses plus faibles suffisent, cf. la Remarque ci-dessous.) Si \mathfrak{q} parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de B^h , on définit le complexe

$$(\mathbf{M}) \quad K_2(K^h) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{q}} K_1(\kappa(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\beta} K_0(\mathbf{F}) \cong \mathbf{Z}$$

comme suit: l'homomorphisme α est somme directe des résidus de Milnor $\partial_{1,\mathfrak{q}}^M$ (cf. chap. 2) attachés aux valuations discrètes de K^h induites par les

divers q (on voit tout de suite qu'il n'y a qu'un nombre fini de résidus qui n'annulent pas un élément donné de $K_2(K^h)$), et $\beta = \sum f_q v_q$, où v_q est la valuation induite sur le corps résiduel $\kappa(q)$ de q par l'idéal maximal de B^h , f_q son degré résiduel. (En fait, $v_q = \partial_{0, v_q}^M$ et la multiplication par f_q est précisément la norme $K_0(\kappa(v_q)) \rightarrow K_0(\mathbf{F})$.)

LEMME 5.1. *(M) est un complexe.*

Démonstration. Par le lemme 3.2, le groupe multiplicatif de K^h est engendré par les unités de B^h , l'uniformisante π , la variable T et les éléments de la forme P/T^n , où P est un polynôme de Weierstrass de degré n . Il suffit donc de vérifier l'égalité $\beta\alpha(\langle a, b \rangle) = 0$ quand a et b sont parmi ces générateurs. Les cas où a ou b est une unité, ou bien $a = \pi$, $b = T$, sont triviaux. Si P est de Weierstrass, $\beta\alpha(\langle \pi, P \rangle) = n - e_q f_q = 0$, (où e_q est l'indice de ramification de v_q) car \mathbf{F} est supposé parfait. Vu la multiplicativité et l'anticommutativité des symboles $\langle a, b \rangle$ (cf. Bass-Tate [3]), il nous reste à traiter les cas où $a = P/T^n$, $b = Q/T^k$, ou bien $a = P/T^n$, $b = T$. Sur de tels $\langle a, b \rangle$ le résidu $\partial_{1, (\pi)}^M$ est trivial, donc on peut se borner aux autres places de K_h . Or elles peuvent être identifiées à des places du corps de fonctions $\mathbf{F}(T)$ par le morphisme naturel $\text{Spec } B_\pi^h \rightarrow \text{Spec } \mathbf{F}[T]$. Si v est une place de $\mathbf{F}(T)$, triviale sur \mathbf{F} , qui ne provient pas d'une place de B_π^h , on a, grâce à la normalisation par $1/T^n$,

$$\partial_{1, v}^M(\langle a, b \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = T \text{ et } v \text{ est la place à l'infini;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant si v_π est la valuation de k , \mathfrak{p} une place de $\mathbf{F}(T)$, $v_\mathfrak{p}$ le prolongement unique de v_π sur le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ avec degré résiduel $f_\mathfrak{p}$, on a la formule $v_\pi \circ N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} = f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}$, ce qui nous donne

$$\beta\alpha(\langle a, b \rangle) = v_\pi \circ \sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1, \mathfrak{p}}^M(\langle a, b \rangle)$$

où \mathfrak{p} parcourt les places de $\mathbf{F}(T)$ triviales sur \mathbf{F} (y compris la place à l'infini, car $v_\pi(1) = 0$). Mais la loi de réciprocité de Bass-Tate ([3], chap. I.5) nous dit que $\sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1, \mathfrak{p}}^M = 0$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. Le complexe du lemme peut être largement généralisé; en fait, il peut être construit pour n'importe quel anneau local noethérien excellent de dimension 2. Pour voir $\beta\alpha = 0$ dans ce cas, on montre d'abord par un argument de normes que l'on peut remplacer l'anneau par son complété, puis par un autre argument de normes et le théorème de Cohen on se réduit au cas de $O_k[[T]]$, ce qui se traite comme dans le lemme ci-dessus. On n'a pas besoin d'hypothèse sur le corps résiduel; le fait que l'anneau soit excellent assure la validité de la formule $n = ef$.

Enfin, nous signalons que Kato [7] définit un complexe encore plus général, pour n'importe quel schéma excellent, qui est un analogue du complexe de Gersten-Quillen en K -théorie de Milnor. Mais la vérification du fait que ce soit un complexe se réduit immédiatement au cas mentionné ci-dessus.

Maintenant rien ne nous empêche de finir la démonstration du th. 2. Soient A° , K° comme au chapitre précédent, $A^{\circ\circ}$ le hensélisé strict de A° avec corps de fractions K° . $A^{\circ\circ}$ n'est autre que le hensélisé de $O_k^{nr}[T]_{(\pi, T)}$, et comme on l'a déjà remarqué, $K^{\circ\circ}$ est de dimension cohomologique 2. Donc la suite spectrale de Hochschild-Serre induit un isomorphisme $H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2}))$. De même, si \mathfrak{p}° est un idéal premier de hauteur 1 de A° , la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie étale (cf. Milne [11], p. 106) induit un isomorphisme $H^3(K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}))$, car on a pour tout $i \geq 0$ des isomorphismes

$$(5.2) \quad H^i(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} | \mathfrak{p}^\circ} H^i(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})$$

(où les $\mathfrak{p}^{\circ\circ}$ sont les idéaux premiers de $A^{\circ\circ}$ au-dessus de \mathfrak{p}°) et les corps $K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}$ sont de dimension cohomologique 2. Quant à la vérification de (5.2), on peut supposer $i = 0$, puis remplacer les anneaux en question par leurs complétés, et alors on peut de nouveau invoquer [16], chap. I, par. 2.3, le théorème sur les extensions de valuations.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathbf{F}, K_2(K^{\circ\circ})/m) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^1(\mathbf{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} | \mathfrak{p}^\circ} K_2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ})/m) & \xrightarrow{\partial^M} & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^1(\mathbf{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} | \mathfrak{p}^\circ} H^2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^3(K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \rightarrow & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \end{array}$$

(où, bien sûr, $K_2(K^{\circ\circ})/m$ veut dire $K_2(K^{\circ\circ})/mK_2(K^{\circ\circ})$ etc.) Remarquons que l'homomorphisme marqué ∂^M est induit par le composé de deux résidus de Milnor, comme dans le complexe (\mathbf{M}) (noter, cependant, que tous les $f_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}$ sont égaux à 1), et ∂ est induit par le composé de deux résidus de Hochschild-Serre. Donc la commutativité du deuxième quadrant en haut est assurée par le lemme 2.4; la commutativité du premier est triviale. La ligne en bas est essentiellement la suite du th. 2, la seule différence étant que le composé des

deux résidus qui induit l'isomorphisme du th. 1 tombe dans $H^1(\kappa(v_p), \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$, il faut donc ajouter une corestriction pour l'extension finie de corps $\kappa(v_p) | \mathbf{F}$ pour arriver à $H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$. Mais l'isomorphisme de ce dernier groupe avec $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ n'est pas affecté par les corestrictions. Enfin les deux quadrants en bas commutent par des propriétés formelles de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Une application du lemme 5.1 (avec $A^{\circ\circ}$ à la place de B^h) montre que la première ligne est un complexe. D'autre part, le théorème de Merkuriev-Sousline et le fait que \mathbf{F} soit de dimension cohomologique 1 entraînent la surjectivité du premier homomorphisme vertical en haut. Une chasse au diagramme montre alors que la ligne en bas est aussi un complexe, ce qu'il fallait démontrer.

REFERENCES

- [1] ARTIN, M. Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Pub. Math. IHES* 36 (1969), 23–58.
- [2] ——— *Grothendieck Topologies*. Harvard University, 1961.
- [3] BASS, H. and J. TATE. The Milnor Ring of a Global Field, in: H. Bass (ed.), *Algebraic K-theory II*. Springer LNM 342, 1973.
- [4] BLOCH, S. *Lectures on Algebraic Cycles*. Duke University, 1980.
- [5] FROSSARD, E. *Thèse*. Université de Paris-XI, Orsay, 1995.
- [6] KATO, K. A generalization of local class field theory by using K -groups II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 27 (1980), 603–683.
- [7] ——— Milnor K -theory and the Chow group of zero-cycles, in: Bloch et al. (eds.), *Applications of Algebraic K -Theory to Algebraic Geometry and Number Theory*. *Contemp. Math.*, vol. 55, 241–263, AMS, Providence, 1986.
- [8] ——— A Hasse principle for two-dimensional local fields. *J. reine angew. Math.* 366 (1986), 142–183.
- [9] KATO, K. and S. SAITO. Global class field theory of arithmetic schemes, in: S. Bloch et al. (eds.), *Applications of Algebraic K -Theory to Algebraic Geometry and Number Theory*. *Contemp. Math.*, vol. 55, 255–331, AMS, Providence, 1986.
- [10] LANG, S. *Algebra* (3rd ed.). Addison-Wesley, 1993.
- [11] MILNE, J. S. *Etale Cohomology*. Princeton University Press, 1980.
- [12] NAGATA, M. *Local Rings*. Wiley-Interscience, New York, 1952.
- [13] PERRIN-RIOU, B. Systèmes d'Euler et représentations p -adiques. Prépublication Orsay 96-04.
- [14] SAITO, S. Class field theory for curves over local fields. *J. Number Theory* 21 (1985), 44–80.

- [15] SERRE, J.-P. *Cohomologie Galoisienne* (5^e éd.). Springer LNM 5, 1984.
- [16] ——— *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968.
- [17] ——— Local class field theory, in J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (eds), *Algebraic Number Theory*. Academic Press, London-New York, 1967, 129–162.
- [18] TATE, J. Global class field theory, in: J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (eds), *Algebraic Number Theory*. Academic Press, London-New York, 1967, 163–203.
- [19] ——— Relations between K_2 and Galois cohomology. *Invent. Math.* 36 (1976), 257–274.

(Reçu le 27 novembre 1996)

Tamás Szamuely

Équipe Arithmétique et Géométrie Algébrique, URA D0752
Université de Paris-Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
F-91405 Orsay
France

Vide-leer-empty