

# LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor(en): **Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## LA SOMMATION DE RAMANUJAN

par B. CANDELPERGER, M. A. COPPO et E. DELABAERE

RÉSUMÉ. Il s'agit de donner une présentation rigoureuse de la méthode de sommation de Ramanujan et d'étudier les propriétés de cette sommation.

### 1. INTRODUCTION

Au début du chapitre VIII de ses *Notebooks* (cf. [B1]), Ramanujan introduit un procédé de sommation des séries basé sur la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin. Plus précisément, Ramanujan se sert de la formule de développement des sommes partielles :

$$a(1) + a(2) + \cdots + a(x-1) = C + \int a(x) dx + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^{k-1} a(x)$$

pour associer à la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  la constante  $C$  qu'il appelle la constante de la série. Ainsi, par exemple, la constante de la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est la constante d'Euler. Ramanujan observe que la constante  $C$  « a de mystérieuses relations avec la série », et qu'elle est « comme le centre de gravité d'un corps », aussi n'hésite-t-il pas à la substituer à la série. Le procédé de Ramanujan, implicitement employé par Euler pour sommer la série harmonique (cf. [E]), peut être justifié par des calculs formels (cf. §2).

Dans [H], Hardy étudie ce procédé à l'aide de la formule d'Euler-MacLaurin, pour des séries liées à la fonction  $\zeta$ , en laissant subsister une certaine ambiguïté sur la borne de l'intégrale.

Dans cet article, on donne une présentation rigoureuse du procédé de Ramanujan. Pour cela, on introduit un cadre analytique cohérent pour assurer

qu'une série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  admet *une et une seule* somme de Ramanujan, celle-ci étant définie comme la valeur en 1 de l'unique solution de l'équation aux différences  $R(x) - R(x+1) = a(x)$  vérifiant la condition:  $\int_1^2 R(t) dt = 0$  (cf. §3). Ceci permet de développer dans ce cadre les propriétés de cette sommation (cf. §4) et d'établir un lien avec l'interpolation de Newton (cf. §6).

Il convient de noter que le procédé de Ramanujan *n'est pas un procédé de sommation au sens usuel*: si la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  converge au sens habituel, sa somme de Cauchy (c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles de la série) ne coïncide pas en général avec la somme de la série au sens de Ramanujan (cf. §3.1, exemple 2). Les liens existant entre les deux procédés de sommation sont explicités au paragraphe 3.2.

## 2. DÉVELOPPEMENTS D'EULER-MACLAURIN FORMELS

Soit  $a$  une fonction analytique dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . Dans cette partie, on considère la série

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \dots$$

comme une expression formelle. Soit  $R(x)$  le «reste de la série à l'ordre  $x$ » défini formellement par:

$$R(x) = \sum_{n \geq 0} a(n+x) = a(x) + a(x+1) + \dots$$

Par définition de  $R$ , on a:

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = R(1),$$

et la «fonction»  $R$  est solution formelle de l'équation aux différences:

$$R(x) - R(x+1) = a(x).$$

Soit  $E$  l'opérateur de translation défini par  $Ef(x) = f(x+1)$ , que l'on peut encore écrire grâce à la formule de Taylor:  $E = e^{\partial}$ ,  $\partial := \partial_x$  désignant l'opérateur de dérivation ordinaire. Si  $I$  désigne l'opérateur d'identité, l'équation aux différences précédente peut s'écrire à l'aide des opérateurs  $E$  et  $I$  sous la forme:

$$(I - E)R = a.$$

En inversant, on obtient:

$$R = \frac{I}{I - E} a,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$R = -\frac{\partial}{e^{\partial} - I} \partial^{-1} a.$$

Le développement de Taylor formel :

$$\frac{\partial}{e^{\partial} - I} = I + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^k$$

permet alors d'obtenir ce que nous appellerons le développement formel de  $R$  :

$$R(x) = -\partial^{-1} a(x) - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^{k-1} a(x).$$

Par définition de  $R$ , on a :

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \dots + a(x-1) + R(x),$$

et en remplaçant  $R(x)$  par son développement formel, il vient l'égalité :

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \dots + a(x-1) - \partial^{-1} a(x) - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^{k-1} a(x).$$

Cette dernière expression justifie formellement le procédé de Ramanujan.

Le choix du développement formel :

$$R(x) = -\int_1^x a(t) dt - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^{k-1} a(x)$$

consiste à prendre pour  $\partial^{-1} a$  la primitive de  $a$  qui s'annule en 1. Ceci revient à imposer à la solution formelle  $R$  de l'équation aux différences la condition :

$$\int_1^2 R(t) dt = 0.$$

En effet, posons  $A(x) = \int_1^x a(t) dt$ . En écrivant

$$A = (I - E) \frac{I}{I - E} A,$$

et en procédant comme précédemment, il vient :

$$A(x) = \int_x^{x+1} A(t) dt + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} [\partial^{k-1} A]_x^{x+1}.$$

D'où :

$$A(1) = 0 = \int_1^2 A(t) dt + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} [\partial^{k-2} a]_1^2 = - \int_1^2 R(t) dt.$$

La condition précédente suffit pour déterminer la solution formelle de l'équation aux différences, elle ne suffit pas pour avoir l'unicité d'une solution analytique car elle laisse l'arbitraire de lui ajouter une solution périodique non constante telle que l'intégrale de 1 à 2 soit nulle. Pour résoudre ce problème nous allons faire des hypothèses supplémentaires sur la fonction  $a$ .

### 3. SOMMATION DE RAMANUJAN ET TRANSFORMATION DE LAPLACE-BOREL

#### 3.1. SOMMATION DE RAMANUJAN

**THÉORÈME 1.** *Soit  $x \mapsto a(x)$  une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . L'équation aux différences :*

$$R(x) - R(x + 1) = a(x)$$

*admet une unique solution analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans  $P$ , notée  $R_a$ , vérifiant la condition :*

$$\int_1^2 R_a(t) dt = 0.$$

*Démonstration.* a) Existence. En prenant la transformée de Borel (cf. appendice) de l'équation aux différences, on obtient :

$$\mathcal{B}(R)(\xi) - e^{-\xi} \mathcal{B}(R)(\xi) = \mathcal{B}(a)(\xi).$$

On en déduit que :

$$\mathcal{B}(R)(\xi) = \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \mathcal{B}(a)(\xi).$$

Il suffit alors de prendre la transformée de Laplace de  $\xi \mapsto \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \mathcal{B}(a)(\xi)$  pour obtenir une solution de l'équation aux différences. Celle-ci est analytique de type exponentiel  $\alpha$  ( $\alpha < 2\pi$ ) dans  $P$ .

b) Unicité. Il s'agit de montrer que si  $f$  de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  est solution de l'équation  $f(x) - f(x + 1) = 0$ , alors  $f$  est constante. Il est clair

que la condition d'analyticité de  $f$  dans le demi-plan  $P$  et la périodicité de  $f$  impliquent que  $f$  est entière. La périodicité de  $f$  permet d'écrire

$$f(x) = g(e^{2i\pi x}),$$

où la fonction  $g$  est la fonction analytique dans  $\mathbf{C} - \{0\}$  définie par  $g(z) = f\left(\frac{1}{2i\pi} \ln(z)\right)$ . Le développement de Laurent de  $g$  en 0 se traduit par le développement de Fourier de  $f$  :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi n x},$$

où les coefficients  $c_n$  sont donnés par les formules intégrales :

$$c_n = \frac{1}{r^n} \int_1^2 f\left(t + \frac{1}{2i\pi} \ln(r)\right) e^{-2i\pi n t} dt \quad \text{pour tout } r > 0.$$

La condition  $f$  de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  permet de majorer les  $|c_n|$  :

$$|c_n| \leq \frac{1}{r^n} C e^{\frac{(\alpha + \epsilon)}{2\pi} |\ln(r)|} \quad \text{avec} \quad \frac{(\alpha + \epsilon)}{2\pi} < 1.$$

Il suffit de faire tendre  $r$  vers 0 et vers  $+\infty$  pour obtenir  $c_n = 0$  pour tout  $n \neq 0$ . La condition de nullité de l'intégrale sur  $[1, 2]$  implique alors  $c_0 = 0$ .  $\square$

REMARQUE 1. D'après la démonstration du théorème précédent, la fonction  $R_a$  peut s'écrire :

$$R_a(x) = \int_{\gamma} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi + C_0,$$

où la constante  $C_0$  dépend du représentant choisi pour  $\mathcal{B}(a)$  (qui n'est définie qu'à l'addition près d'une fonction analytique dans  $\mathbf{C}$  de type exponentiel). D'après les propriétés de la transformation de Borel, la fonction

$$x \mapsto - \int_{\gamma} e^{-x\xi} \frac{1}{\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi$$

est une primitive de  $a$ . On peut donc écrire :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt + \int_{\gamma} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi + C_1.$$

Cette dernière intégrale sur  $\gamma$  ne dépend plus du choix de  $\mathcal{B}(a)$ . En écrivant :

$$\int_1^x a(t) dt = \int_{\gamma} e^{-x\xi} \frac{-1}{\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi - \int_{\gamma} e^{-\xi} \frac{-1}{\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi,$$

on vérifie facilement que la condition de nullité sur l'intégrale de  $R_a$  sur  $[1, 2]$  se traduit par  $C_1 = 0$ . Finalement on a :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt + \int_{\gamma} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi.$$

Si l'on suppose en outre que le mineur  $\hat{a}$  existe (cf. appendice §7.4), on peut écrire la fonction  $R_a$  sous la forme d'une intégrale sur  $[0, +\infty[$  :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \hat{a}(\xi) d\xi.$$

En particulier, on a alors :

$$R_a(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \hat{a}(\xi) d\xi.$$

**DÉFINITION 1.** Soit  $x \mapsto a(x)$  une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . On appelle somme de Ramanujan de la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  et on note  $\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)$  le nombre  $R_a(1)$ .

**REMARQUE 2.** On pourrait définir, pour une fonction  $a$  analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , la somme de Ramanujan de la série comme la valeur en 1 de la fonction  $R_a$  :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = R_a(1).$$

Cependant pour  $\alpha \geq \pi$  ce procédé de sommation ne vérifierait pas :

$$a(n) = b(n) \text{ pour tout entier } n \geq 1 \text{ implique } \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n),$$

comme le montre l'exemple suivant (cf. exemple 5) :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sin(n\pi) = \frac{1}{\pi} \text{ alors que } \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 0 = 0.$$

En fait, pour  $a$  et  $b$  de type exponentiel  $\alpha < \pi$ , la condition :  $a(n) = b(n)$  pour tout entier  $n \geq 1$  implique  $a = b$  d'après le théorème d'unicité de l'interpolation de Carlson (cf. [Bo] p. 153).

EXEMPLE 1. Soit  $a(x) = \frac{1}{x}$ . On a  $\widehat{a}(\xi) = 1$ . D'après la remarque 1, il vient :

$$R_a(x) = -\ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi = -\psi(x),$$

où l'on utilise la notation habituelle  $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ . En particulier :

$$R_a(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi = \gamma,$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler. D'après la définition de la somme de Ramanujan, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = \gamma.$$

EXEMPLE 2. La fonction  $\zeta$  d'Hurwitz (cf. [C]), définie pour  $\Re(x) > 0$  et  $\Re(z) > 1$  par

$$\zeta(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \quad (\text{somme de Cauchy}),$$

vérifie l'équation aux différences :

$$\zeta(x, z) - \zeta(x+1, z) = \frac{1}{x^z},$$

ainsi que l'égalité

$$\int_1^2 \zeta(x, z) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^z} dt = \frac{1}{z-1}.$$

Pour

$$a(x) = \frac{1}{x^z},$$

on a donc :

$$R_a(x) = \zeta(x, z) - \frac{1}{z-1}.$$

On en déduit pour  $\Re(z) > 1$ , la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1},$$

avec

$$\zeta(z) = \zeta(1, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$



Par ailleurs, on a  $\widehat{a}(\xi) = \frac{\xi^{z-1}}{\Gamma(z)}$ . D'où l'expression de la somme de Ramanujan sous forme d'intégrale :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \xi^{z-1} d\xi.$$

REMARQUE 3. Le choix de la normalisation  $\int_1^2 R_a(t) dt = 0$  permet d'écrire :

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{1}{n^z} = \gamma.$$

EXEMPLE 3. Soit  $k$  un entier  $\geq 0$ . La fonction  $R: x \mapsto -\frac{B_{k+1}(x)}{k+1}$ , où  $B_k(x)$  désigne le  $k$ -ième polynôme de Bernoulli, vérifie l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = x^k,$$

ainsi que l'égalité :

$$\int_1^2 R(x) dx = -\frac{1}{k+1}.$$

Pour  $a(x) = x^k$ , on a donc :

$$R_a(x) = \frac{1 - B_{k+1}(x)}{k+1}.$$

On en déduit les sommes de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \frac{1 - B_{k+1}}{k+1} \quad (k \geq 1),$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE 4. La fonction  $R: x \mapsto -\ln(\Gamma(x))$  vérifie l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = \ln(x),$$

ainsi que l'égalité

$$\int_1^2 \ln(\Gamma(t)) dt = -1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Pour  $a(x) = \ln(x)$ , on a donc :

$$R_a(x) = -\ln(\Gamma(x)) - 1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

On en déduit la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = -1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

EXEMPLE 5. Soit  $\alpha$  tel que  $0 < |\alpha| < \pi$ , on a :

$$e^{\alpha x} - e^{\alpha(x+1)} = e^{\alpha x}(1 - e^{\alpha}),$$

$$\int_1^2 e^{\alpha x} dx = (e^{\alpha} - 1) \frac{e^{\alpha}}{\alpha}.$$

Il en résulte que pour  $a(x) = e^{\alpha x}$ , on a :

$$R_a(x) = \frac{e^{\alpha x}}{1 - e^{\alpha}} + \frac{e^{\alpha}}{\alpha}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} e^{\alpha n} = e^{\alpha} \left( \frac{1}{1 - e^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

En particulier, en prenant  $\alpha = it$ , et en séparant partie réelle et imaginaire, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sin(nt) = \frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{\cos t}{t},$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{t}.$$

PROPOSITION 3.1. Pour  $\Re(x) > 0$ , on définit  $\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x)$  par :

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+x-1).$$

On a la relation :

$$R_a(x) = \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x) - \int_1^x a(t) dt.$$

*Démonstration.* On considère la fonction  $b(y) = a(y + x - 1)$ . On a :

$$R_b(y) = R_a(y + x - 1) - \int_1^2 R_a(t + x - 1) dt = R_a(y + x - 1) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

D'où

$$R_b(1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n + x - 1) = R_a(x) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

Or  $\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} R_a(t) dt = -a(x)$ , et le résultat en découle.  $\square$

EXEMPLE 6.

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n + x} = \ln(x) - \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi.$$

### 3.2. LIENS AVEC LA SOMMATION DE CAUCHY

Dans ce paragraphe,  $a$  désigne une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ .

PROPOSITION 3.2. *Si  $R_a(x)$  tend vers une limite finie quand  $x \rightarrow \infty$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  converge au sens de Cauchy, et en notant  $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$  sa somme de Cauchy, on a la relation :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N a(t) dt.$$

*Démonstration.* Soit  $N$  un entier naturel  $> 1$ . En sommant pour  $n = 1, \dots, N - 1$  l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n + 1) = a(n),$$

il vient :

$$R_a(1) - R_a(N) = a(1) + \dots + a(N - 1).$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \dots + a(N - 1) + R_a(N).$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) + \lim_{N \rightarrow \infty} R_a(N).$$

En intégrant entre  $n$  et  $n + 1$  l'équation aux différences

$$R_a(x) - R_a(x + 1) = a(x),$$

puis en sommant pour  $n = 1, \dots, N - 1$ , il vient :

$$- \int_N^{N+1} R_a(t) dt = \int_1^N a(t) dt.$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient la relation :

$$- \lim_{N \rightarrow \infty} R_a(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N a(t) dt. \quad \square$$

REMARQUE 4. Si  $R_a(x) + \int_1^x a(t) dt$  tend vers zéro quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} (a(n) - \int_n^{n+1} a(t) dt)$  converge au sens de Cauchy, et on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a(n) - \int_n^{n+1} a(t) dt \right).$$

EXEMPLE 7.

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \right).$$

La proposition 3.2 admet une sorte de réciproque :

PROPOSITION 3.3. Si la série  $\sum_{n \geq 0} a(n+x)$  converge (au sens de Cauchy) normalement sur tout compact de  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$  et y définit une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  alors :

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx.$$

Si on suppose en outre que  $\int_1^{\infty} a(t) dt$  converge alors :

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

*Démonstration.* La fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx$  vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction  $R_a$ . De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t) dt = \int_1^{\infty} a(t) dt. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction  $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$  avec  $y > 0$ , il vient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y} \int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1} dt.$$

#### 4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

##### 4.1. LINÉARITÉ

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions analytiques de type exponentiel  $\alpha_a < \pi$  et  $\alpha_b < \pi$  respectivement dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , alors pour tout  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $\lambda a + \mu b$  est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par)  $\alpha := \text{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a :

$$R_{\lambda a + \mu b} = \lambda R_a + \mu R_b.$$

Il en résulte que l'application qui à une série  $\sum a(n)$  associe sa somme de Ramanujan est  $\mathbf{C}$ -linéaire.

##### 4.2. TRANSLATION

Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors pour tout entier  $N > 1$  la translatée  $E^N(a)$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a la

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier  $N > 1$ ,*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt.$$

*Démonstration.* En sommant pour  $n = 1, \dots, N-1$  l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n),$$

il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N).$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer  $R_a(N)$  par  $\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt$ .  $\square$

EXEMPLE 9. Pour  $N \geq 2$ , on a :

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}.$$

### 4.3. DÉRIVATION

Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors sa dérivée  $\partial a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ . De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1),$$

où le terme  $a(1)$  provient du fait que  $\int_1^2 \partial(R_a)(t) dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$ . Plus généralement, on montre par récurrence sur  $n$  que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1}a(1).$$

### 4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement  $\alpha_a < \pi$  et  $\alpha_b < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , alors le produit  $ab$  est analytique de type exponentiel  $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$  dans le demi-plan  $P$ . Soient alors  $u$  et  $v$  deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement  $\alpha_u < \pi$  et  $\alpha_v < \pi$  dans le demi-plan  $P$  avec  $\alpha_u + \alpha_v < \pi$ . D'après

les propriétés de linéarité et de translation vues aux paragraphes précédents, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (u(n) - u(n+1)) v(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} u(n+1) (v(n+1) - v(n)) + u(1)v(1) - \int_1^2 u(t)v(t) dt. \end{aligned}$$

Cette formule est pour la sommation de Ramanujan l'analogue de la classique formule de sommation par parties d'Abel. En particulier en remplaçant  $u$  par  $R_a$ , on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)v(n) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} R_a(n+1) (v(n+1) - v(n)) + R_a(1)v(1) - \int_1^2 R_a(t)v(t) dt.$$

En remplaçant à présent  $v$  par  $R_b$  dans la formule précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)R_b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n)R_a(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) - \int_1^2 R_a(t)R_b(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n b(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) + \int_1^2 R_a(t)R_b(t) dt. \end{aligned}$$

Cette dernière formule admet deux cas particuliers intéressants :

PROPOSITION 4.2.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n \partial a(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \partial a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) + \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \end{aligned}$$

*Démonstration.* En appliquant la formule (1) avec  $b(x) = \partial a(x)$ , et en utilisant la propriété de dérivation vue au §4.3, il vient :

$$\int_1^2 R_a(t) R_{\partial a}(t) dt = \int_1^2 R_a(t) \partial R_a(t) dt = \frac{1}{2} [R_a^2]_1^2 = \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \quad \square$$

PROPOSITION 4.3.

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial^{-1} a(n),$$

avec  $\partial^{-1} a(x) = \int_1^x a(t) dt$ .

*Démonstration.* En appliquant la formule (1) avec  $b(x) = 1$ , on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) + \int_1^2 t R_a(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n).$$

Posons  $A(x) = \int_1^x a(t) dt$ . On a  $\partial R_A = R_a$  de sorte que (en intégrant par parties)

$$\int_1^2 t R_a(t) dt = R_A(1).$$

La proposition en résulte.  $\square$

EXEMPLE 10. (Sommes harmoniques : cf. [B1] pp. 251–253, [AV], [BB]).

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} H_n = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = \frac{3}{2} \gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi),$$

$$2 \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1 + \gamma^2 + \int_1^2 \psi^2(t) dt,$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \gamma \zeta(2),$$

avec :

$$H_n = \sum_1^n \frac{1}{k}.$$



REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t) dt = \zeta(2) \frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où  $Li_2$  désigne le dilogarisme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt = \gamma \zeta(2) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt.$$

#### 4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi/2$  dans le demi-plan  $\{x \mid \Re(x) > 0\}$ , on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

*Démonstration.* D'après l'équation aux différences vérifiée par  $R_a$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_a(2x) - R_a(2x+1) &= a(2x), \\ R_a(2x+1) - R_a(2(x+1)) &= a(2x+1). \end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a(2(x+1)) = a(2x) + a(2x+1).$$

On a donc :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (a(2n) + a(2n+1)) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt,$$

et de plus,  $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$ .  $\square$

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}(\gamma + \ln(2)) - 1 + \frac{1}{2} \ln(3).$$

#### 4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. Si  $a$  est la fonction entière de type exponentiel  $\tau < \pi$  définie par :

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \text{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k,$$

alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t) dt - \frac{1}{2} \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}.$$

*Démonstration.* Montrons que  $R_a = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$ . On sait que  $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$ . Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x).$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n,$$

on constate que pour  $\tau < r < \pi$ , il existe une constante  $C_r$  telle que pour tout  $x$ , on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|} (k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent  $R_a$ .  $\square$

EXEMPLE 12. Pour  $0 < y < \pi$ , le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$  :

$$\frac{\sin(xy)}{x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} y^{2k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{1}{2}y.$$

REMARQUE 6. La série précédente converge également au sens de Cauchy, et la relation de la proposition 3.3 s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)}{n} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} + \int_y^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{1}{2}y = \frac{\pi - y}{2}.$$

REMARQUE 7. La proposition précédente ne s'applique pas si l'on ne suppose pas la fonction  $a$  entière. Par exemple, si on l'appliquait à la fonction  $x \mapsto \frac{x^{2q+1}y}{e^{xy}-1}$  avec  $q$  entier  $> 0$  et  $y > 0$ , le développement en série entière :

$$x^{2q} \frac{xy}{e^{xy}-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^{2q} x^k y^k \quad (|x| < 2\pi)$$

permettrait d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t-1} dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4}y.$$

En fait, cette formule n'est pas valable car d'après l'exemple 8 (cf. § 3.2), on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y^{2q+1}} \int_y^{\infty} \frac{t^{2q+1}}{e^t-1} dt,$$

ce qui donnerait :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t-1} dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4}y.$$

Or, cette relation est fautive, comme on le voit en faisant tendre  $y$  vers l'infini. Remarquons que pour  $y = 2\pi$  et  $q = 2p$ , la relation précédente donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{2} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{4p+2} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

alors que l'on a (cf. [B2] p. 256 et p. 262) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{4} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{8p+4} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

PROPOSITION 4.6. Soit  $f(x) = \sum_{k \geq 1} c_k x^k$  une série entière de rayon de convergence  $\rho > 1$ . On suppose que la fonction  $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  est analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} f(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^k} = c_1 \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

Démonstration. Posons  $a(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ . On a le développement convergent à l'infini :

$$a(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \frac{1}{x^n}.$$

Le mineur de  $a$  est donc la fonction entière de type exponentiel  $1/\rho < 1$  :

$$\widehat{a}(\xi) = \sum_{k \geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Par définition de la somme de Ramanujan, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \widehat{a}(\xi) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \sum_{k \geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi. \end{aligned}$$

L'hypothèse  $\rho > 1$  permet de majorer les  $|c_k|$  et ainsi de permuter les signes  $\int$  et  $\sum$  dans la formule précédente. Il vient alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi. \quad \square$$

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction  $x \mapsto xe^{-zx}$  :

$$xe^{-zx} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

#### 4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Soit  $a(z, x)$  analytique dans  $D \times P$ . On suppose que pour tout compact  $K \subset D$ , il existe des constantes  $C_K$  et  $\tau_K < \pi$  telles que pour tout  $x \in P$  avec  $|x| > 1$  et tout  $z \in K$  on ait  $|a(z, x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$ . Alors  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z, n)$  est analytique dans  $D$ . De plus, on a :

$$\partial_z \left( \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z, n) \right) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z, n).$$

*Démonstration.* On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de  $a$  tel que pour tout  $z \in K \subset D$  (où  $K$  est un compact quelconque), on ait  $|\mathcal{B}(a)(z, x)| \leq C e^{k|z|}$  avec  $0 < k < 1$ . Soit  $R_a(z, 1) = \int_{\gamma} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi$ . Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre  $z$ , la fonction à intégrer étant majorée uniformément en  $z \in K$  par une fonction intégrable.  $\square$

COROLLAIRE 4.1. La fonction  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$  est une fonction entière. Pour tout  $z \in \mathbf{C} - \{1\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} &= \zeta(z) - \frac{1}{z-1}, \\ - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} &= \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le fait que  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$  est analytique dans  $\mathbf{C}$  est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant

vérifiée pour  $\Re(z) > 1$ , par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout  $z \in \mathbf{C} - \{1\}$ . La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à  $z$ .  $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour  $z = 1$  en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164):

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^k \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n}.$$

### 5. EXEMPLES D'UTILISATION

#### 5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION $\psi$

La fonction  $\psi$  vérifie l'équation :

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. § 3.1), on a pour  $\Re(z) > -1$  :

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z}.$$

Supposons  $|z| < 1$  et posons  $f(x) = \frac{x}{1+xz}$ , on a

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction  $f$  :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k,$$

de rayon de convergence  $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$ , permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k \geq 1} (-1)^k z^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

On en déduit le développement de  $\psi$  :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k \geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k) z^{k-1}.$$

5.2. CALCUL DE  $\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n)$ 

PROPOSITION 5.1. Si  $q$  désigne un entier naturel  $\geq 1$ , alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \frac{1}{(2q+1)} \langle B_{2q+1}, \psi \rangle,$$

avec

$$\langle B_{2q+1}, \psi \rangle = \int_0^1 B_{2q+1}(x) \psi(x) dx.$$

*Démonstration.* On commence par montrer le

LEMME 5.1. Si  $a$  est telle que  $a(0) = \partial a(0) = \dots = \partial^{2q-1} a(0) = 0$ , alors

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \int_0^1 a(t) dt + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) R_{\partial^{2q+1}a}(x) dx.$$

*Démonstration.* Soit  $A(x) = \int_0^x a(t) dt$ . On applique la formule d'Euler-MacLaurin avec reste intégral sur  $[0, 1]$  à la fonction  $R_A$ . Il vient :

$$\frac{\partial R_A(0) + \partial R_A(1)}{2} = \sum_{n \geq 1}^q \left[ \frac{B_{2n}}{2n!} \partial^{2n} R_A \right]_0^1 + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) \partial^{2q+2} R_A(x) dx.$$

Comme  $[\partial^{2n} R_A]_0^1 = 0$  pour tout  $n \leq q$ , on a :

$$\frac{\partial R_A(0) + \partial R_A(1)}{2} = \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) \partial^{2q+2} R_A(x) dx.$$

En utilisant la propriété  $R_{\partial^n f} = \partial^n R_f + \partial^{n-1} f(1)$ , on obtient :

$$R_a(1) = \int_0^1 a(t) dt + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) R_{\partial^{2q+1}a}(x) dx. \quad \square$$

On applique le lemme à la fonction  $a(x) = x^{2q} \ln(x)$ , cette fonction vérifie

$$\int_0^1 a(t) dt = -\frac{1}{(2q+1)^2} \quad \text{et} \quad \partial^{2q+1} a(x) = \frac{(2q)!}{x}. \quad \square$$

REMARQUE 9. D'après le corollaire 4.1 (cf. §4.7), on a aussi :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \zeta'(-2q).$$

En dérivant l'équation fonctionnelle de la fonction  $\zeta$  :

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right),$$

on obtient pour  $q$  entier  $\geq 1$  l'égalité (cf. [B1] pp. 273–276) :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} + (-1)^{q+1} \frac{(2q)!}{2(2\pi)^{2q}} \zeta(2q+1).$$

De la proposition précédente, on déduit alors l'égalité :

$$\langle B_{2q+1}, \psi \rangle = \frac{(-1)^q}{2} (2q+1) \frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}} \zeta(2q+1).$$

REMARQUE 10. Pour  $|x| < 1$ , on a le développement :

$$-\frac{\pi}{2} \cot(\pi x) = -\frac{1}{2x} + \sum_{k \geq 1} \zeta(2k) x^{2k-1}.$$

Posons :

$$f(x) = -\frac{1}{2x} - \gamma - \sum_{k \geq 1} \zeta(2k+1) x^{2k}.$$

D'après le développement de  $\psi$  vu au paragraphe précédent, on a la décomposition :

$$\psi(x) = f(x) - \frac{\pi}{2} \cot(\pi x).$$

La fonction  $x \mapsto \cot(\pi x)$  est une fonction impaire par rapport au point  $\frac{1}{2}$ . De la formule de réflexion :

$$\psi(1-x) = \psi(x) + \pi \cot(\pi x),$$

on déduit que la fonction  $f$  est une fonction paire par rapport au point  $\frac{1}{2}$ . La fonction  $x \mapsto B_{2q+1}(x)$  étant impaire par rapport au point  $\frac{1}{2}$ , il résulte alors de la décomposition de  $\psi$  précédente les égalités :

$$\langle B_{2q+1}, \psi \rangle = -\frac{\pi}{2} \langle B_{2q+1}, \cot(\pi x) \rangle \quad \text{et} \quad \langle B_{2q+1}, f \rangle = 0,$$



ce qui se traduit par les deux systèmes infinis d'équations :

$$\sum_{k \geq 1} \zeta(2k) \langle x^{2k-1}, B_{2q+1} \rangle = r_q + \frac{(-1)^q}{2} (2q+1) \frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}} \zeta(2q+1),$$

$$\sum_{k \geq 1} \zeta(2k+1) \langle x^{2k}, B_{2q+1} \rangle = -r_q,$$

avec  $r_q = \langle \frac{1}{2x}, B_{2q+1} \rangle$ .

### 5.3. UNE SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

En dérivant sous le signe  $\sum^{\mathcal{R}}$ , on vérifie aisément que la fonction

$$u(t, x, y) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4(n+t)}}$$

est solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u.$$

D'après le noyau de l'équation de la chaleur, on en déduit que

$$u(1, 0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} u(0, x, y) dx dy,$$

c'est-à-dire, après passage en coordonnées polaires :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1} = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} du.$$

Or, d'après l'exemple 13 (cf. §4.6), on sait que :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) \frac{u^k}{k!},$$

et d'autre part :

$$\gamma = 1 - \ln(2) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit l'identité :

$$\ln(2) - 1 = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) \frac{u^k}{k!} du,$$

qui traduit le fait que la série  $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right)$  est Borel-sommable et que

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) = \ln(2) - 1,$$

où  $\sum^{\mathcal{B}}$  désigne la somme de Borel de la série.

## 6. INTERPOLATION DE NEWTON ET SOMMATION DE RAMANUJAN

Étant donnée une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ , il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction  $a$  telle que  $a(n) = a_n$  pour tout  $n \geq 1$ . On a la *formule d'interpolation de Newton* :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences  $n$ -ièmes :

$$\Delta^n a(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k a_{k+1}.$$

Du développement de Newton de  $a$  :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

on déduit formellement l'égalité :

$$\sum_{k \geq 1} a(k) = a(1) \sum_{k \geq 1} 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \sum_{k \geq 1} (k-1)(k-2)\dots(k-n).$$

Calculons à présent  $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n)$ . De l'équation aux différences :

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1) - x(x-1)\dots(x-n) = -(n+1)(x-1)\dots(x-n),$$

il découle que :

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = -\frac{1}{n+1} (x-1)(x-2)\dots(x-n-1) + I_{n+1}/(n+1),$$

avec :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x(x-1)\dots(x-n)dx.$$

On a donc :

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n) = \frac{I_{n+1}}{n+1},$$

et

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = I_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

De plus, les intégrales  $I_{n+1}$  sont données par la fonction génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} z^n = \frac{1}{\ln(1+z)} - \frac{1}{z}.$$

PROPOSITION 6.1. *Si  $a$  est une fonction analytique bornée dans le demi-plan  $P$ , alors :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

*Démonstration.* On commence par démontrer le

LEMME 6.1. *Si  $a$  est une fonction analytique bornée dans le demi-plan  $P$ , alors les  $\Delta^n a(1)$  forment une suite bornée.*

*Démonstration.* Par le théorème des résidus on a :

$$\Delta^n a(1) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{a(x)}{(x-1)\dots(x-(n+1))} dx,$$

où  $\gamma_n$  est le lacet entourant les points  $1, 2, \dots, n+1$  composé d'un segment vertical passant par le point  $\frac{1}{2}$  et du cercle de centre  $n+1$  et de rayon  $n+1$ . Sur le cercle, on a :

$$|(x-1)\dots(x-(n+1))| \geq (n+1)!,$$

et sur le segment, on a

$$|(x-1)\dots(x-(n+1))| \geq \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}.$$

La majoration de  $\Delta^n a(1)$  provient du fait que le cercle est de longueur  $2\pi(n+1)$  et que le segment est de longueur  $< 2\sqrt{n+1}$  ce qui permet de majorer l'intégrale sur le segment à l'aide de la formule de Stirling.  $\square$

La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$  est absolument convergente car les  $\Delta^n a(1)$  sont majorés par une constante et la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}$  est convergente (par un théorème taubérien classique). D'autre part, d'après des propriétés connues des séries de Newton (cf. [G]) la fonction :

$$x \mapsto - \sum_{n \geq 0} \frac{\Delta^n a(1)}{(n+1)!} (x-1)(x-2)\dots(x-(n+1)) + \sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$$

vérifie les trois propriétés caractéristiques de la fonction  $R_a$ . □

EXEMPLE 14. D'après le calcul de  $\Delta^n a$  pour  $a(x) = \frac{1}{x}$  :

$$\Delta^n a(x) = (-1)^n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

il vient :

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

Pour tout entier  $N \geq 2$ , on en déduit, d'après l'exemple 9 (cf. §4.2), l'égalité :

$$\gamma = 1 + \dots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{N(N+1)\dots(N+n)} \frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

REMARQUE 11. De la relation :

$$x^k = 1 + \sum_{n=1}^{n=k} S_k^n (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

avec :

$$S_k^n = \frac{1}{n!} \Delta^n x^k(1) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} C_n^p (p+1)^k,$$

on déduit, en prenant la somme de Ramanujan des deux membres, la relation :

$$\frac{1 - B_{k+1}}{k+1} = \sum_{n=0}^{n=k} S_k^n \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

REMARQUE 12. Le développement formel de  $R_a$  :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt - \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(x),$$

permet d'écrire formellement l'égalité :

$$R_a(1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = - \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(1).$$

En général, la série de droite diverge au sens de Cauchy. Cependant, on pourrait montrer que sous certaines hypothèses sur  $a$ , cette série est Borel-sommable et que

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = - \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{B}} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(1),$$

où  $\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{B}}$  désigne la somme de Borel. Par exemple :

$$\gamma = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^n \frac{B_n}{nN^n}.$$

D'autre part, on a vu (cf. proposition 6.1) que sous certaines hypothèses, on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1).$$

Remarquons que l'égalité formelle :

$$- \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$$

peut se déduire directement des développements formels :

$$\frac{I}{e^{\partial} - I} = \frac{I}{\partial} + \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n,$$

$$\frac{I}{\ln(I + \Delta)} = \frac{I}{\Delta} + \sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n,$$

ainsi que de la relation :

$$\partial = \ln E = \ln(I + \Delta).$$

## 7. APPENDICE : TRANSFORMATION DE LAPLACE-BOREL

Dans cet appendice, on donne une présentation de la transformation de Laplace-Borel bien adaptée au cadre de cet article. Pour un exposé plus systématique, le lecteur pourra se référer par exemple à [M].

## 7.1. NOTATIONS

Soit  $U$  un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture  $\geq \pi$  du plan  $\mathbf{C}$  de la variable complexe  $x$ . Nous désignons par  $\mathcal{O}(U)$  l'algèbre des fonctions holomorphes dans l'ouvert  $U$  du plan complexe.

Nous dirons que  $a \in \mathcal{O}(U)$  est de *type exponentiel*  $r \geq 0$  dans  $U$  si pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout demi-plan fermé  $S \in U$  il existe une constante  $C = C(S, \epsilon) > 0$  telle que pour tout  $x \in S$ , on ait la majoration :

$$|a(x)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|}.$$

L'ensemble des fonctions  $a \in \mathcal{O}(U)$  de type exponentiel  $r \geq 0$  dans  $U$  forme un espace vectoriel que nous noterons  $\mathcal{O}(U)^{\text{exp}(r)}$ . L'ensemble des fonctions  $a \in \mathcal{O}(U)$  de type exponentiel quelconque forme quant à lui une algèbre que l'on note  $\mathcal{O}(U)^{\text{exp}}$ .

## 7.2. TRANSFORMATION DE BOREL

## 7.2.1. Transformée de Borel

Soit  $P$  l'ouvert du plan complexe défini par  $P := \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . Considérons l'application analytique  $x \mapsto a(x)$  que l'on suppose appartenir à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(P)^{\text{exp}(r)}$  ( $r \geq 0$ ). Soit dans ces conditions  $d$  une demi-droite (orientée vers l'infini) dans l'ouvert  $P$ . On définit la *transformée de Borel*  $\mathcal{B}_d$  associée à  $d$  par :

$$\mathcal{B}_d(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_d e^{x\xi} a(x) dx.$$

Pour fixer les idées, on notera  $k$  l'origine de la demi-droite d'intégration et l'on supposera que  $k \in ]0, 1]$ . On identifiera la direction à l'infini de cette demi-droite  $d = d(\theta)$  via son angle polaire  $\theta$ ,  $|\theta| \leq \pi/2$ . La transformée de Borel  $\mathcal{B}_d(a)$  s'écrit alors

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{d(\theta)} e^{x\xi} a(x) dx = -\frac{1}{2i\pi} e^{k\xi} \int_0^{+\infty} e^{te^{i\theta}\xi} a(k + te^{i\theta}) e^{i\theta} dt.$$

La condition de convergence de cette intégrale découle de notre hypothèse sur  $a$  : on sait que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $C = C(\epsilon, k) > 0$  telle que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$

$$|a(k + te^{i\theta})| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)|k+te^{i\theta}|},$$

de sorte que

$$\left| e^{te^{i\theta}\xi} a(k + te^{i\theta}) e^{i\theta} \right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)k} e^{(\Re(e^{i\theta}\xi) + r + \epsilon)t} e^{-\epsilon t/2}.$$

On en déduit que la condition

$$\Re(e^{i\theta}\xi) \leq -(r + \epsilon)$$

fournit une majoration uniforme en  $\xi$  de l'intégrand par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous montre donc que  $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$  est une fonction holomorphe dans le demi-plan ouvert :

$$U_r(\theta) = \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}.$$

La décomposition précédente nous fournit également sans peine une estimation sur la croissance à l'infini de  $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$  : notons  $S'$  un demi-plan fermé contenu dans l'ouvert  $U_r(\theta)$ . Nous pouvons supposer que pour  $\epsilon > 0$  assez petit ce demi-plan fermé  $S'$  est contenu dans le domaine des  $\xi$  tels que la condition

$$\Re(e^{i\theta}\xi) \leq -(r + \epsilon)$$

soit satisfaite. Dans ces conditions, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\left| e^{te^{i\theta}\xi} a(k + te^{i\theta}) e^{i\theta} \right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)k} e^{-\epsilon t/2},$$

et par conséquent pour tout  $\xi \in S'$ ,

$$|\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)| \leq \frac{Ce^{(r+\epsilon/2)k}}{\epsilon\pi} e^{k|\xi|}.$$

De là découle que  $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$  admet une croissance de type exponentiel  $k$  dans  $U_r(\theta)$ .

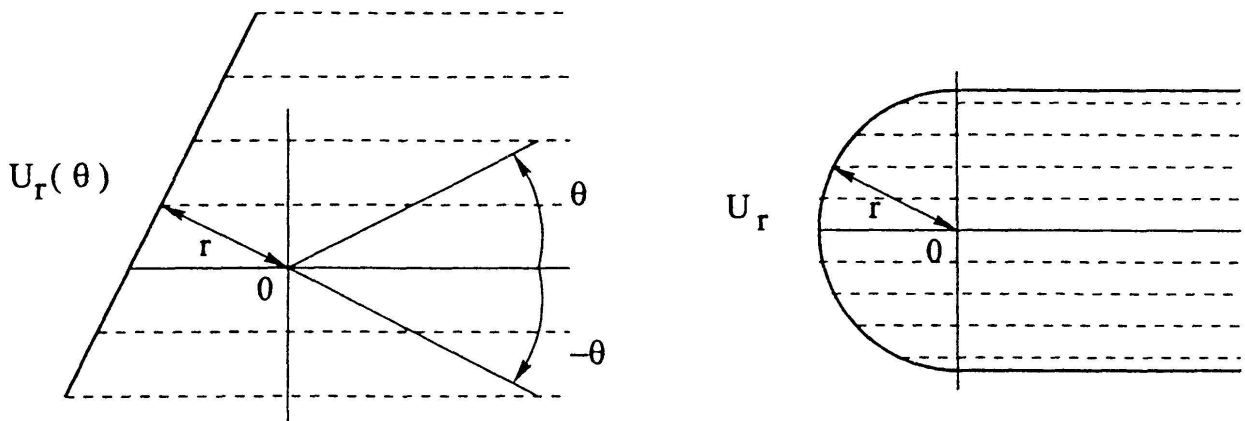


FIGURE 1

En faisant varier  $\theta$  dans l'intervalle fermé  $[-\pi/2, +\pi/2]$  et en application du théorème de Cauchy, la transformée de Borel se prolonge analytiquement en une fonction  $\mathcal{B}_k(a)$  qui est analytique dans l'ouvert

$$U_r := \bigcup_{\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]} U_r(\theta)$$

du plan complexe  $\mathbf{C}$  que l'on a représenté sur la figure 1. Remarquons d'ailleurs que la constante  $C$  intervenant dans les majorations précédentes peut être choisie de façon indépendante du choix de l'angle polaire  $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$ . On en déduit que la transformée de Borel  $\mathcal{B}_k(a)$  est de type exponentiel  $k$  à l'infini, autrement dit on a le

LEMME 7.1. Si  $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$  alors  $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ .

Notons à présent que le changement d'origine  $k \rightarrow k'$  de  $d$  se traduit par :

$$\mathcal{B}_{k'}(a) = \mathcal{B}_k(a) + h(a)_{k,k'} ,$$

avec  $h(a)_{k,k'} \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp(\tau)}$  où  $\tau = \text{Sup}(k, k')$ . Ceci nous amène à poser la définition suivante :

DÉFINITION 2. Soit  $x \mapsto a(x)$  une fonction analytique appartenant à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ . La transformée de Borel de  $a$ , notée  $\mathcal{B}(a)$ , est une fonction analytique définie dans l'ouvert  $U_r$  qui coïncide dans cet ouvert avec l'une des fonctions  $\mathcal{B}_k(a)$  modulo l'addition d'un élément de l'algèbre  $\mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$ .

### 7.2.2. Dépendance suivant un paramètre

Les propriétés précédentes de la transformée de Borel se transposent au cas où  $a$  dépend d'un paramètre de la façon suivante.

DÉFINITION 3. Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$ . On notera  $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$  l'espace vectoriel des fonctions  $a : (x, z) \mapsto a(x, z)$  holomorphes dans l'ouvert  $P \times D$  telles que : pour tout demi-plan fermé  $S$  contenu dans l'ouvert  $P$ , pour tout compact  $K \subset D$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_a = C_a(S, K, \epsilon) > 0$  tel que pour tout  $x \in S$  on ait la majoration (uniforme en  $z$ ) :

$$|a(x, z)| \leq C_a e^{(r+\epsilon)|x|} .$$



LEMME 7.2. *On suppose que  $a$  appartient à l'espace  $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$ . Alors  $\mathcal{B}_k(a)$  définit une fonction holomorphe dans l'ouvert  $U_r \times D$ ; de plus pour tout fermé  $S'$  contenu dans l'ouvert  $U_r$ , pour tout compact  $K \subset D$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $C = C(S', K, \epsilon) > 0$  tel que pour tout  $\xi \in S'$  on ait la majoration (uniforme en  $z$ ):*

$$|\mathcal{B}_k(a)(\xi, z)| \leq C e^{(k+\epsilon)|\xi|}.$$

Autrement dit,  $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$ .

$$\text{De plus si } z = (z_1, \dots, z_n), \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \mathcal{B}_k(a) = \mathcal{B}_k\left(\frac{\partial}{\partial z_i} a\right).$$

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.1 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.  $\square$

### 7.3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

#### 7.3.1. Transformée de Laplace

DÉFINITION 4. Soit  $k \geq 0$  et  $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ , où  $U_r$  est le voisinage sectoriel introduit précédemment. On définit la transformée de Laplace de  $f$  par :

$$\mathcal{L}f(x) = \int_{\gamma} e^{-x\xi} f(\xi) d\xi,$$

où  $\gamma$  est le chemin représenté sur la figure 2.

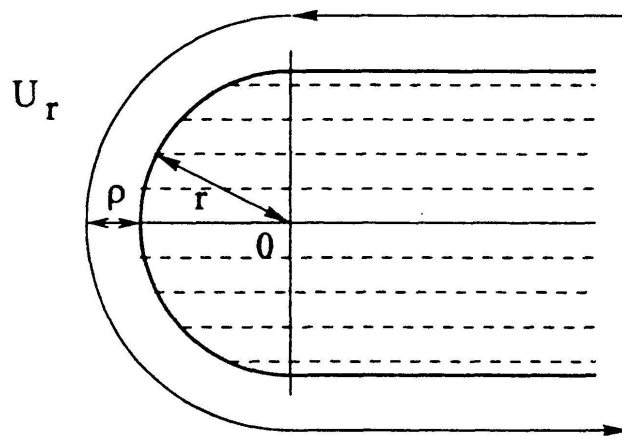


FIGURE 2

Remarquons tout de suite que l'hypothèse de croissance faite sur  $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$  implique (en utilisant les mêmes arguments qu'à la sous-

section précédente) l'analyticité de  $\mathcal{L}f$  dans l'ouvert  $P_k$  du plan complexe des  $x$ , voisinage sectoriel de l'infini défini par

$$P_k := \{x \in \mathbf{C} \mid \Re(x) > k\}.$$

L'étude sur sa croissance à l'infini est l'objet du lemme suivant :

LEMME 7.3. *Si  $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$  alors la fonction  $\mathcal{L}f$  appartient à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(P_k)^{\exp(r)}$ .*

*Démonstration.* Pour montrer que  $\mathcal{L}f$  est de type exponentiel dans l'ouvert  $P_k$ , considérons un demi-plan fermé  $S$  contenu dans cet ouvert : pour  $\epsilon > 0$  assez petit nous pouvons supposer que le secteur fermé  $S$  est inclus dans le domaine des  $x$  tels que la condition

$$\Re(x) \geq (k + \epsilon)$$

soit satisfaite. En utilisant notre liberté de déformation du chemin  $\gamma$  à l'aide d'une homotopie laissant invariantes les directions à l'infini nous pouvons aussi supposer que  $\gamma$  s'écrit comme la somme :

- du chemin compact orienté  $C(r + \rho)$  consistant à parcourir le demi-cercle situé dans le domaine  $\Re(\xi) \leq 0$ , de rayon  $\alpha + \rho$ , où  $\rho$  est un réel positif que l'on peut prendre *aussi petit* que l'on veut ;
- de la réunion de deux demi-droites orientées  $\gamma(r + \rho)$  et  $\overline{\gamma(r + \rho)}$ , demi-droites horizontales dont la première est d'extrémité  $i(r + \rho)$  et la seconde d'origine  $-i(r + \rho)$ .

Considérons l'intégrale sur  $\gamma(r + \rho)$ ,

$$\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi) d\xi = e^{-ix(r+\rho)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t + i(r + \rho)) dt.$$

Suivant notre hypothèse sur  $f$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \geq 0$ , on ait :

$$|f(t + i(r + \rho))| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)} e^{-\epsilon t/2} e^{(k+\epsilon)t},$$

de sorte que pour tout  $x \in S$ ,

$$|e^{-xt} f(t + i(r + \rho))| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)} e^{-\epsilon t/2},$$

et par conséquent pour tout  $x \in S$ ,

$$\left| \int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi) d\xi \right| \leq \frac{2C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}}{\epsilon} e^{(r+\rho)|x|}.$$

L'intégrale sur  $\overline{\gamma(r+\rho)}$  se traite de la même façon, avec une conclusion identique. En ce qui concerne l'intégrale sur le chemin compact  $C(r+\rho)$ , il suffit de majorer le module de  $f$  par une constante (par compacité) pour conclure.  $\square$

### 7.3.2. Dépendance suivant un paramètre

La transformation de Laplace «à paramètre» ne pose pas de difficulté particulière : avec les notations de la sous-section précédente énonçons le

LEMME 7.4. Si  $f \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$  où  $D$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$ , la fonction  $\mathcal{L}f$  définit une fonction holomorphe dans l'ouvert  $P_k \times D$  ; de plus pour tout demi-plan fermé  $S \subset P_k$ , pour tout compact  $K \subset D$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $C = C(S, K, \epsilon) > 0$  telle que pour tout  $x \in S$ , on ait la majoration (uniforme en  $z$ ) :

$$|\mathcal{L}f(x, z)| \leq C e^{(r+\epsilon)|x|},$$

autrement dit :  $\mathcal{L}f \in \mathcal{O}_D(P_k)^{\exp(r)}$ .

$$\text{De plus si } z = (z_1, \dots, z_n), \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial z_i} f\right).$$

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.3 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.  $\square$

### 7.3.3. La transformation de Laplace-Borel

Le lemme qui suit est une simple remarque.

LEMME 7.5. Si  $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$ , on a  $\mathcal{L}f = 0$ .

Mais cela nous permet de définir sans ambiguïté la transformée de Laplace  $\mathcal{LB}(a)$  de la transformée de Borel d'un élément  $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$  : pour tout  $k > 0$ ,

$$\mathcal{LB}(a) := \mathcal{LB}_k(a).$$

Par conséquent,  $\mathcal{LB}(a)$  définit une fonction analytique dans l'ouvert  $P$  (faire tendre  $k$  vers 0). Plus précisément :

THÉORÈME 2. Soit  $a \in \mathcal{O}(P)^{\text{exp}(r)}$ . Alors

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a)) = a$$

dans l'ouvert  $P$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in S$  où  $S$  est le secteur fermé de l'ouvert  $P$  représenté sur la figure 3. D'après les définitions de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{B}$  on a :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = \int_{\gamma} e^{-x\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi$$

où  $\mathcal{B}(a)(\xi)$  est défini par :

$$\mathcal{B}(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d_+} e^{y\xi} a(y) dy$$

si  $\xi$  est sur  $\gamma_+$ , et par :

$$\mathcal{B}(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d_-} e^{y\xi} a(y) dy$$

si  $\xi$  est sur  $\gamma_-$ , où les chemins  $d_+$ ,  $d_-$ ,  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  sont représentés sur la figure 3. On a donc :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = \int_{\gamma_+} e^{-x\xi} \frac{-1}{2i\pi} \int_{d_+} e^{y\xi} a(y) dy d\xi + \int_{\gamma_-} e^{-x\xi} \frac{-1}{2i\pi} \int_{d_-} e^{y\xi} a(y) dy d\xi.$$

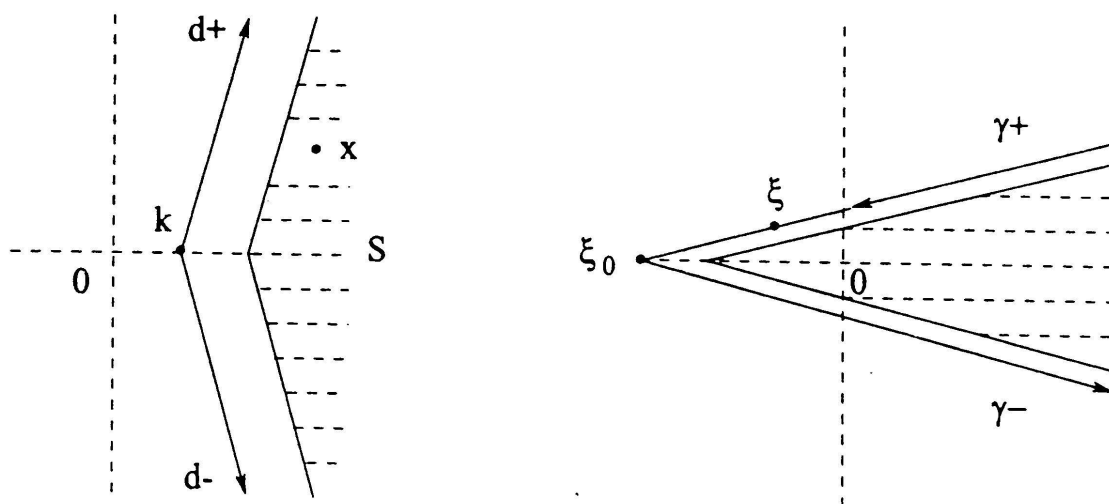


FIGURE 3

Cela donne en permutant l'ordre d'intégration :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d_+} \int_{\gamma_+} e^{(y-x)\xi} d\xi a(y) dy - \frac{1}{2i\pi} \int_{d_-} \int_{\gamma_-} e^{(y-x)\xi} d\xi a(y) dy.$$

En intégrant  $\xi \rightarrow e^{(y-x)\xi}$  le long de  $\gamma_+$  et de  $\gamma_-$ , on obtient :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d_+} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy + \frac{1}{2i\pi} \int_{d_-} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

Si  $C_R$  désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy :

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

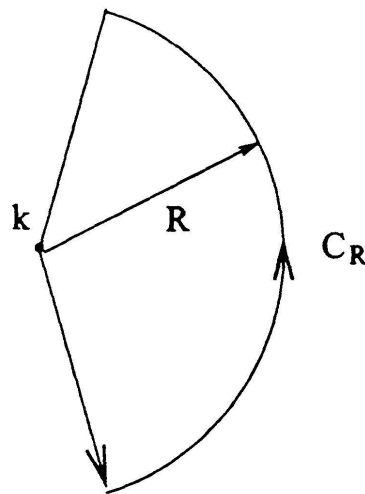


FIGURE 4

En faisant tendre  $R$  vers l'infini on voit que  $\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = a(x)$  pour tout  $x \in S$ .  $\square$

#### 7.4. LE CAS INTÉGRABLE

Supposons que la fonction  $a$  appartienne à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$  ( $r \geq 0$ ) où  $V_\beta$  désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid -\beta < \text{Arg}(x) < \beta\},$$

avec  $\pi/2 < \beta < \pi$ .

Reprenons les notations de la sous-section 7.2; en particulier  $U_r(\theta)$  désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant  $\mathcal{B}_k(a)$  de la transformée de Borel de  $a$  se prolonge analytiquement :

– sur l'ouvert

$$U_r^+ := \bigcup_{\theta \in [-\beta, 0]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée  $\mathcal{B}_k^+(a) \in \mathcal{O}(U_r^+)^{\exp(k)}$  ;

– sur l'ouvert

$$U_r^- := \bigcup_{\theta \in [0, \beta]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée  $\mathcal{B}_k^-(a) \in \mathcal{O}(U_r^-)^{\exp(k)}$  (voir figure 5).

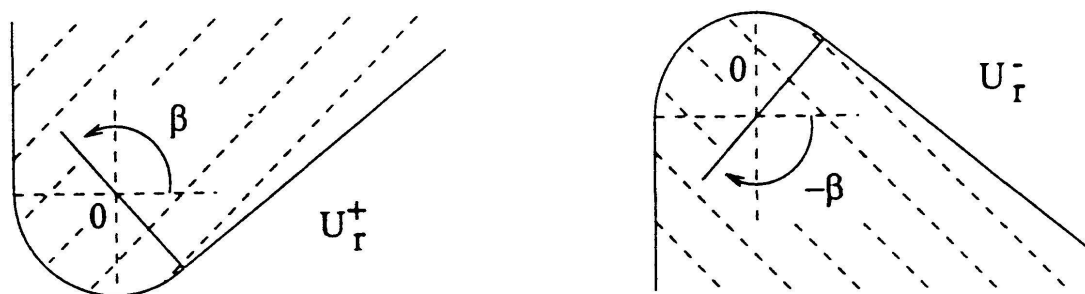


FIGURE 5

Faisons à présent l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 1.** La fonction  $\mathcal{B}_k^+(a)$  (resp.  $\mathcal{B}_k^-(a)$ ) se prolonge analytiquement dans l'ouvert  $U_0^+$  (resp.  $U_0^-$ ).

Désignons alors par  ${}^*U^\beta$  le voisinage sectoriel de l'infini défini par  ${}^*U^\beta := U_0^+ \cap U_0^-$ . Une application du théorème de Cauchy montre alors la proposition suivante.

**PROPOSITION 7.1.** Sous les hypothèses précédentes, la fonction  $\widehat{a}$ , appelée le mineur de  $a$ , définie pour  $\xi \in {}^*U^\beta$  par :  $\widehat{a}(\xi) = \mathcal{B}_k^+(a)(\xi) - \mathcal{B}_k^-(a)(\xi)$ , ne dépend pas de  $k$  et on a :

$$\widehat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{x\xi} a(x) dx,$$

où  $\Gamma$  est le chemin représenté sur la figure 6. De plus,  $\widehat{a} \in \mathcal{O}({}^*U^\beta)^{\exp(0)}$ .

Le fait que  $\widehat{a}$  appartienne à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}({}^*U^\beta)^{\exp(0)}$  est une conséquence directe des propriétés de croissance à l'infini de  $\mathcal{B}_k^+(a)$  et  $\mathcal{B}_k^-(a)$  en faisant tendre  $k$  vers zéro.

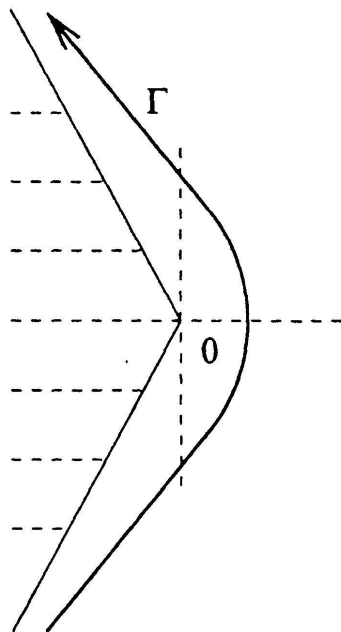


FIGURE 6

PROPOSITION 7.2. Si la fonction  $a$  possède un développement  $a(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$  convergent à l'infini, alors la fonction  $\hat{a}$  est entière et  $\hat{a}(\xi) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}$ .

*Démonstration.* Le développement  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$  est uniformément convergent pour  $|x| > R$ . En prenant pour contour  $\Gamma$  un cercle de centre 0 et de rayon  $R' > R$ , on a :

$$\hat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{x\xi} \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 1} a_n \int_{\Gamma} e^{-x\xi} \frac{1}{x^n} dx,$$

ce qui fournit l'expression désirée par un simple calcul de résidus.  $\square$

Ajoutons à présent l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 2. L'origine est une singularité intégrable de  $B(a)$ .

Nous pouvons écrire sous ces conditions l'égalité :

$$\int_{\gamma} e^{-x\xi} B(a)(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \hat{a}(\xi) d\xi,$$

de sorte que le résultat qui suit est un simple corollaire du théorème 2.

COROLLAIRE 7.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$a(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\xi} \widehat{a}(\xi) d\xi$$

pour tout  $x$  dans l'ouvert  $V_\beta$ , où la fonction analytique  $\widehat{a}$  désigne le mineur de  $a$ .

## 7.5. QUELQUES PROPRIÉTÉS

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème 2.

PROPOSITION 7.3. *L'opérateur de dérivation  $\partial$  se transforme par  $\mathcal{B}$  en l'opérateur de multiplication par  $-\xi$ ,*

$$\text{Dérivation } \frac{\partial}{\partial x} \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \text{ multiplication par } (-\xi),$$

tandis que l'opérateur de translation  $E^\omega$  de vecteur  $\omega > 0$  se transforme par  $\mathcal{B}$  en l'opérateur de multiplication par  $e^{-\omega\xi}$ ,

$$\text{Translation } E^\omega \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \text{ multiplication par } (e^{-\omega\xi}).$$

## RÉFÉRENCES

- [AV] APOSTOL, T. M. and T. H. VU. Dirichlet series related to the Riemann zeta function. *Journal of Number Theory* 19 (1984), 85–102.
- [B1] BERNDT, B. C. *Ramanujan's Notebooks*, Part I. Springer Verlag, New York, 1985.
- [B2] ——— *Ramanujan's Notebooks*, Part II. Springer Verlag, New York, 1989.
- [Bo] BOAS, R. P. *Entire Functions*. Academic Press, New York, 1954.
- [BB] BORWEIN, D., P. BORWEIN and R. GIRGENSOHN. Explicit evaluation of Euler sums. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 38 (1995), 277–294.
- [C] CARTIER, P. An introduction to zeta functions, in *From Number Theory to Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1992.



- [E] EULER, L. *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino. Commentaire 47 de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg* (1736), 1741.
- [H] HARDY, G. H. *Divergent Series*. Clarendon Press, Oxford, 1949.
- [G] GUELFOND, A. O. *Calcul des différences finies*. Dunod, Paris, 1963.
- [L] LEWIN, L. *Polylogarithms and Associated Functions*. North Holland, New York, 1981.
- [M] MALGRANGE, B. *Equations différentielles à coefficients polynomiaux. Progress in Mathematics 96*, Birkhäuser, Basel, 1991.

(Reçu le 6 janvier 1997)

B. Candelpergher  
(candel@math.unice.fr)

M.A. Coppo  
(coppo@math.unice.fr)

E. Delabaere  
(delab@math.unice.fr)

Laboratoire J.A. Dieudonné  
UMR 6621 du CNRS  
Université de Nice-Sophia Antipolis  
Parc Valrose  
F-06108 Nice Cedex 2  
France