1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 93–132

LA SOMMATION DE RAMANUJAN

par B. CANDELPERGHER, M. A. COPPO et E. DELABAERE

RÉSUMÉ. Il s'agit de donner une présentation rigoureuse de la méthode de sommation de Ramanujan et d'étudier les propriétés de cette sommation.

1. INTRODUCTION

Au début du chapitre VIII de ses *Notebooks* (cf. [B1]), Ramanujan introduit un procédé de sommation des séries basé sur la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin. Plus précisément, Ramanujan se sert de la formule de développement des sommes partielles :

$$a(1) + a(2) + \cdots + a(x-1) = C + \int a(x)\,dx + \sum_{k\geq 1} \frac{B_k}{k!}\,\partial^{k-1}a(x)$$

pour associer à la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ la constante C qu'il appelle la constante de la série. Ainsi, par exemple, la constante de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est la constante d'Euler. Ramanujan observe que la constante C « a de mystérieuses relations avec la série », et qu'elle est « comme le centre de gravité d'un corps », aussi n'hésite-t-il pas à la substituer à la série. Le procédé de Ramanujan, implicitement employé par Euler pour sommer la série harmonique (cf. [E]), peut être justifié par des calculs formels (cf. § 2).

Dans [H], Hardy étudie ce procédé à l'aide de la formule d'Euler-MacLaurin, pour des séries liées à la fonction ζ, en laissant subsister une certaine ambiguïté sur la borne de l'intégrale.

Dans cet article, on donne une présentation rigoureuse du procédé de Ramanujan. Pour cela, on introduit un cadre analytique cohérent pour assurer

Mots-clés : Séries divergentes. Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin. Equation aux différences. Transformation de Laplace-Borel. Fonctions zêta.

qu'une série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ admet *une et une seule* somme de Ramanujan, celle-ci étant définie comme la valeur en 1 de l'unique solution de l'équation aux différences $R(x)-R(x+1) = a(x)$ vérifiant la condition : $\int_1^2 R(t)\,dt = 0$ (cf. § 3). Ceci permet de développer dans ce cadre les propriétés de cette sommation (cf. § 4) et d'établir un lien avec l'interpolation de Newton (cf. § 6).

Il convient de noter que le procédé de Ramanujan *n'est pas un procédé de sommation au sens usuel* : si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ converge au sens habituel, sa somme de Cauchy (c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles de la série) ne coïncide pas en général avec la somme de la série au sens de Ramanujan (cf. § 3.1, exemple 2). Les liens existant entre les deux procédés de sommation sont explicités au paragraphe 3.2.

2. Développements d'Euler-MacLaurin formels

Soit a une fonction analytique dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$. Dans cette partie, on considère la série

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \dots$$

comme une expression formelle. Soit $R(x)$ le « reste de la série à l'ordre x » défini formellement par :

$$R(x) = \sum_{n\geq 0} a(n+x) = a(x) + a(x+1) + \dots .$$

Par définition de R, on a :

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = R(1)\,,$$

et la « fonction » R est solution formelle de l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = a(x)\,.$$

Soit E l'opérateur de translation défini par $Ef(x) = f(x+1)$, que l'on peut encore écrire grâce à la formule de Taylor : $E = e^{\partial}$, $\partial := \partial_x$ désignant l'opérateur de dérivation ordinaire. Si I désigne l'opérateur d'identité, l'équation aux différences précédente peut s'écrire à l'aide des opérateurs E et I sous la forme :

$$(I - E)\,R = a\,.$$

En inversant, on obtient :