

3.2. Liens avec la sommation de Cauchy

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Démonstration. On considère la fonction $b(y) = a(y + x - 1)$. On a :

$$R_b(y) = R_a(y + x - 1) - \int_1^2 R_a(t + x - 1) dt = R_a(y + x - 1) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

D'où

$$R_b(1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n + x - 1) = R_a(x) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

Or $\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} R_a(t) dt = -a(x)$, et le résultat en découle. \square

EXEMPLE 6.

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n + x} = \ln(x) - \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left(\frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi.$$

3.2. LIENS AVEC LA SOMMATION DE CAUCHY

Dans ce paragraphe, a désigne une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$.

PROPOSITION 3.2. *Si $R_a(x)$ tend vers une limite finie quand $x \rightarrow \infty$, alors la série $\sum_{n \geq 1} a(n)$ converge au sens de Cauchy, et en notant $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ sa somme de Cauchy, on a la relation :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N a(t) dt.$$

Démonstration. Soit N un entier naturel > 1 . En sommant pour $n = 1, \dots, N - 1$ l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n + 1) = a(n),$$

il vient :

$$R_a(1) - R_a(N) = a(1) + \dots + a(N - 1).$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \dots + a(N - 1) + R_a(N).$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) + \lim_{N \rightarrow \infty} R_a(N).$$

En intégrant entre n et $n + 1$ l'équation aux différences

$$R_a(x) - R_a(x + 1) = a(x),$$

puis en sommant pour $n = 1, \dots, N - 1$, il vient :

$$- \int_N^{N+1} R_a(t) dt = \int_1^N a(t) dt.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient la relation :

$$- \lim_{N \rightarrow \infty} R_a(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N a(t) dt. \quad \square$$

REMARQUE 4. Si $R_a(x) + \int_1^x a(t) dt$ tend vers zéro quand $x \rightarrow +\infty$, alors la série $\sum_{n \geq 1} (a(n) - \int_n^{n+1} a(t) dt)$ converge au sens de Cauchy, et on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) - \int_n^{n+1} a(t) dt \right).$$

EXEMPLE 7.

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \right).$$

La proposition 3.2 admet une sorte de réciproque :

PROPOSITION 3.3. Si la série $\sum_{n \geq 0} a(n+x)$ converge (au sens de Cauchy) normalement sur tout compact de $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ et y définit une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ alors :

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx.$$

Si on suppose en outre que $\int_1^{\infty} a(t) dt$ converge alors :

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx$ vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction R_a . De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t) dt = \int_1^{\infty} a(t) dt. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$ avec $y > 0$, il vient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y} \int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1} dt.$$

4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

4.1. LINÉARITÉ

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ respectivement dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors pour tout λ, μ dans \mathbf{C} , $\lambda a + \mu b$ est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par) $\alpha := \text{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$ dans le demi-plan P et on a :

$$R_{\lambda a + \mu b} = \lambda R_a + \mu R_b.$$

Il en résulte que l'application qui à une série $\sum a(n)$ associe sa somme de Ramanujan est \mathbf{C} -linéaire.

4.2. TRANSLATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P , alors pour tout entier $N > 1$ la translatée $E^N(a)$ est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P et on a la