

## 4. Propriétés de la sommation

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

*Démonstration.* La fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx$  vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction  $R_a$ . De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t) dt = \int_1^{\infty} a(t) dt. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction  $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$  avec  $y > 0$ , il vient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y} \int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1} dt.$$

#### 4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

##### 4.1. LINÉARITÉ

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions analytiques de type exponentiel  $\alpha_a < \pi$  et  $\alpha_b < \pi$  respectivement dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , alors pour tout  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $\lambda a + \mu b$  est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par)  $\alpha := \text{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a :

$$R_{\lambda a + \mu b} = \lambda R_a + \mu R_b.$$

Il en résulte que l'application qui à une série  $\sum a(n)$  associe sa somme de Ramanujan est  $\mathbf{C}$ -linéaire.

##### 4.2. TRANSLATION

Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors pour tout entier  $N > 1$  la translatée  $E^N(a)$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a la

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier  $N > 1$ ,*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \dots + a(N-1) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt.$$

*Démonstration.* En sommant pour  $n = 1, \dots, N-1$  l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n),$$

il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \dots + a(N-1) + R_a(N).$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer  $R_a(N)$  par  $\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt$ .  $\square$

EXEMPLE 9. Pour  $N \geq 2$ , on a :

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \dots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}.$$

### 4.3. DÉRIVATION

Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors sa dérivée  $\partial a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ . De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1),$$

où le terme  $a(1)$  provient du fait que  $\int_1^2 \partial(R_a)(t) dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$ . Plus généralement, on montre par récurrence sur  $n$  que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1}a(1).$$

### 4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement  $\alpha_a < \pi$  et  $\alpha_b < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , alors le produit  $ab$  est analytique de type exponentiel  $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$  dans le demi-plan  $P$ . Soient alors  $u$  et  $v$  deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement  $\alpha_u < \pi$  et  $\alpha_v < \pi$  dans le demi-plan  $P$  avec  $\alpha_u + \alpha_v < \pi$ . D'après

les propriétés de linéarité et de translation vues aux paragraphes précédents, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (u(n) - u(n+1)) v(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} u(n+1) (v(n+1) - v(n)) + u(1)v(1) - \int_1^2 u(t)v(t) dt. \end{aligned}$$

Cette formule est pour la sommation de Ramanujan l'analogue de la classique formule de sommation par parties d'Abel. En particulier en remplaçant  $u$  par  $R_a$ , on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)v(n) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} R_a(n+1) (v(n+1) - v(n)) + R_a(1)v(1) - \int_1^2 R_a(t)v(t) dt.$$

En remplaçant à présent  $v$  par  $R_b$  dans la formule précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)R_b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n)R_a(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) - \int_1^2 R_a(t)R_b(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n b(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) + \int_1^2 R_a(t)R_b(t) dt. \end{aligned}$$

Cette dernière formule admet deux cas particuliers intéressants :

PROPOSITION 4.2.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n \partial a(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \partial a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) + \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \end{aligned}$$

*Démonstration.* En appliquant la formule (1) avec  $b(x) = \partial a(x)$ , et en utilisant la propriété de dérivation vue au §4.3, il vient :

$$\int_1^2 R_a(t) R_{\partial a}(t) dt = \int_1^2 R_a(t) \partial R_a(t) dt = \frac{1}{2} [R_a^2]_1^2 = \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \quad \square$$

PROPOSITION 4.3.

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial^{-1} a(n),$$

avec  $\partial^{-1} a(x) = \int_1^x a(t) dt$ .

*Démonstration.* En appliquant la formule (1) avec  $b(x) = 1$ , on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) + \int_1^2 tR_a(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n).$$

Posons  $A(x) = \int_1^x a(t) dt$ . On a  $\partial R_A = R_a$  de sorte que (en intégrant par parties)

$$\int_1^2 tR_a(t) dt = R_A(1).$$

La proposition en résulte.  $\square$

EXEMPLE 10. (Sommes harmoniques : cf. [B1] pp. 251–253, [AV], [BB]).

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} H_n = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = \frac{3}{2} \gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi),$$

$$2 \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1 + \gamma^2 + \int_1^2 \psi^2(t) dt,$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \gamma \zeta(2),$$

avec :

$$H_n = \sum_1^n \frac{1}{k}.$$

REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t) dt = \zeta(2) \frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où  $Li_2$  désigne le dilogarisme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt = \gamma \zeta(2) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt.$$

#### 4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi/2$  dans le demi-plan  $\{x \mid \Re(x) > 0\}$ , on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

*Démonstration.* D'après l'équation aux différences vérifiée par  $R_a$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_a(2x) - R_a(2x+1) &= a(2x), \\ R_a(2x+1) - R_a(2(x+1)) &= a(2x+1). \end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a(2(x+1)) = a(2x) + a(2x+1).$$

On a donc :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (a(2n) + a(2n+1)) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt,$$

et de plus,  $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$ .  $\square$

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}(\gamma + \ln(2)) - 1 + \frac{1}{2} \ln(3).$$

#### 4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si  $a$  est la fonction entière de type exponentiel  $\tau < \pi$  définie par :*

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \text{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k,$$

alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t) dt - \frac{1}{2} \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}.$$

*Démonstration.* Montrons que  $R_a = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$ . On sait que  $R_{x^k} = \frac{1 - B_{k+1}(x)}{k+1}$ . Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x).$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n,$$

on constate que pour  $\tau < r < \pi$ , il existe une constante  $C_r$  telle que pour tout  $x$ , on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|} (k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent  $R_a$ .  $\square$

EXEMPLE 12. Pour  $0 < y < \pi$ , le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$  :

$$\frac{\sin(xy)}{x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} y^{2k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{1}{2}y.$$

REMARQUE 6. La série précédente converge également au sens de Cauchy, et la relation de la proposition 3.3 s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)}{n} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} + \int_y^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{1}{2}y = \frac{\pi - y}{2}.$$

REMARQUE 7. La proposition précédente ne s'applique pas si l'on ne suppose pas la fonction  $a$  entière. Par exemple, si on l'appliquait à la fonction  $x \mapsto \frac{x^{2q+1}y}{e^{xy}-1}$  avec  $q$  entier  $> 0$  et  $y > 0$ , le développement en série entière :

$$x^{2q} \frac{xy}{e^{xy}-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^{2q} x^k y^k \quad (|x| < 2\pi)$$

permettrait d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t-1} dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4}y.$$

En fait, cette formule n'est pas valable car d'après l'exemple 8 (cf. § 3.2), on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y^{2q+1}} \int_y^{\infty} \frac{t^{2q+1}}{e^t-1} dt,$$

ce qui donnerait :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t-1} dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4}y.$$



Or, cette relation est fautive, comme on le voit en faisant tendre  $y$  vers l'infini. Remarquons que pour  $y = 2\pi$  et  $q = 2p$ , la relation précédente donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{2} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{4p+2} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

alors que l'on a (cf. [B2] p. 256 et p. 262) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{4} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{8p+4} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

PROPOSITION 4.6. Soit  $f(x) = \sum_{k \geq 1} c_k x^k$  une série entière de rayon de convergence  $\rho > 1$ . On suppose que la fonction  $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  est analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} f(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^k} = c_1 \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

Démonstration. Posons  $a(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ . On a le développement convergent à l'infini :

$$a(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \frac{1}{x^n}.$$

Le mineur de  $a$  est donc la fonction entière de type exponentiel  $1/\rho < 1$  :

$$\widehat{a}(\xi) = \sum_{k \geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Par définition de la somme de Ramanujan, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \widehat{a}(\xi) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \sum_{k \geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi. \end{aligned}$$

L'hypothèse  $\rho > 1$  permet de majorer les  $|c_k|$  et ainsi de permuter les signes  $\int$  et  $\sum$  dans la formule précédente. Il vient alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi. \quad \square$$

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction  $x \mapsto xe^{-zx}$  :

$$xe^{-zx} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

#### 4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Soit  $a(z, x)$  analytique dans  $D \times P$ . On suppose que pour tout compact  $K \subset D$ , il existe des constantes  $C_K$  et  $\tau_K < \pi$  telles que pour tout  $x \in P$  avec  $|x| > 1$  et tout  $z \in K$  on ait  $|a(z, x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$ . Alors  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z, n)$  est analytique dans  $D$ . De plus, on a :

$$\partial_z \left( \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z, n) \right) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z, n).$$

*Démonstration.* On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de  $a$  tel que pour tout  $z \in K \subset D$  (où  $K$  est un compact quelconque), on ait  $|\mathcal{B}(a)(z, x)| \leq C e^{k|z|}$  avec  $0 < k < 1$ . Soit  $R_a(z, 1) = \int_{\gamma} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi$ . Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre  $z$ , la fonction à intégrer étant majorée uniformément en  $z \in K$  par une fonction intégrable.  $\square$

COROLLAIRE 4.1. La fonction  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$  est une fonction entière. Pour tout  $z \in \mathbf{C} - \{1\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} &= \zeta(z) - \frac{1}{z-1}, \\ - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} &= \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le fait que  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$  est analytique dans  $\mathbf{C}$  est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant

vérifiée pour  $\Re(z) > 1$ , par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout  $z \in \mathbf{C} - \{1\}$ . La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à  $z$ .  $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour  $z = 1$  en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164):

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^k \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n}.$$

### 5. EXEMPLES D'UTILISATION

#### 5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION $\psi$

La fonction  $\psi$  vérifie l'équation :

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. § 3.1), on a pour  $\Re(z) > -1$  :

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z}.$$

Supposons  $|z| < 1$  et posons  $f(x) = \frac{x}{1+xz}$ , on a

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction  $f$  :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k,$$

de rayon de convergence  $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$ , permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k \geq 1} (-1)^k z^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

On en déduit le développement de  $\psi$  :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k \geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k) z^{k-1}.$$