4.4. Sommation par parties

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier $N > 1$,*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. En sommant pour $n = 1, \ldots, N-1$ l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n)\,,$$

il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N)\,.$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer $R_a(N)$ par $\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt$. $\square$

EXEMPLE 9. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\gamma = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}\,.$$

4.3. DÉRIVATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors sa dérivée ∂a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P. De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1)\,,$$

où le terme $a(1)$ provient du fait que $\int_1^2 \partial(R_a)(t)\,dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$. Plus généralement, on montre par récurrence sur n que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1} a(1)\,.$$

4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors le produit ab est analytique de type exponentiel $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$ dans le demi-plan P. Soient alors u et v deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_u < \pi$ et $\alpha_v < \pi$ dans le demi-plan P avec $\alpha_u + \alpha_v < \pi$. D'après les propriétés de linéarité et de translation vues aux paragraphes précédents, on a :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(u(n) - u(n+1)\big)\, v(n)$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} u(n+1)\,\big(v(n+1) - v(n)\big) + u(1)\,v(1) - \int_1^2 u(t)\,v(t)\,dt\,.$$

Cette formule est pour la sommation de Ramanujan l'analogue de la classique formule de sommation par parties d'Abel. En particulier en remplaçant u par R_a, on obtient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,v(n) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} R_a(n+1)\,\big(v(n+1) - v(n)\big) + R_a(1)\,v(1) - \int_1^2 R_a(t)\,v(t)\,dt\,.$$

En remplaçant à présent v par R_b dans la formule précédente, on obtient alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,R_b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n)\,R_a(n)$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) - \int_1^2 R_a(t)\,R_b(t)\,dt\,,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(1)\quad \begin{aligned} &\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{1}^{n} b(k) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) \sum_{1}^{n} a(k) \\ &\qquad = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) + \int_1^2 R_a(t)\,R_b(t)]\,dt\,. \end{aligned}$$

Cette dernière formule admet deux cas particuliers intéressants :

PROPOSITION 4.2.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{1}^{n} \partial a(k) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) \sum_{1}^{n} a(k)$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,\partial a(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) + \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,.$$

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = \partial a(x)$, et en utilisant la propriété de dérivation vue au §4.3, il vient:

$$\int_1^2 R_a(t)\, R_{\partial a}(t)\, dt = \int_1^2 R_a(t)\, \partial R_a(t)\, dt = \frac{1}{2}[R_a^2]_1^2 = \frac{1}{2}a(1)^2 - a(1) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,. \quad \square$$

PROPOSITION 4.3.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_{1}^{n} a(k) = \frac{3}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial^{-1} a(n)\,,$$

avec $\partial^{-1} a(x) = \int_1^x a(t)\, dt$.

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = 1$, on obtient:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_{1}^{n} a(k) + \int_1^2 tR_a(t)\, dt = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,.$$

Posons $A(x) = \int_1^x a(t)\, dt$. On a $\partial R_A = R_a$ de sorte que (en intégrant par parties)

$$\int_1^2 tR_a(t)\, dt = R_A(1)\,.$$

La proposition en résulte. $\square$

EXEMPLE 10. (Sommes harmoniques: cf. [B1] pp. 251–253, [AV], [BB]).

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_n = \frac{3}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} 1 - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi)\,,$$

$$2 \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1 + \gamma^2 + \int_1^2 \psi^2(t)\, dt\,,$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \gamma\zeta(2)\,,$$

avec:

$$H_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t)\, dt = \zeta(2)\frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarithme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt = \gamma\zeta(2) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}\,.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt\,.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. *Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a, on peut écrire :

$$R_a(2x) - R_a(2x+1) = a(2x)\,,$$
$$R_a(2x+1) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x+1)\,.$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x) + a(2x+1)\,.$$

On a donc :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(a(2n) + a(2n+1)\big) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. □