

4.4. Sommatation par parties

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier $N > 1$,*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt.$$

Démonstration. En sommant pour $n = 1, \dots, N-1$ l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n),$$

il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N).$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer $R_a(N)$ par $\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt$. \square

EXEMPLE 9. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}.$$

4.3. DÉRIVATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P , alors sa dérivée ∂a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P . De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1),$$

où le terme $a(1)$ provient du fait que $\int_1^2 \partial(R_a)(t) dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$. Plus généralement, on montre par récurrence sur n que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1}a(1).$$

4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors le produit ab est analytique de type exponentiel $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$ dans le demi-plan P . Soient alors u et v deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_u < \pi$ et $\alpha_v < \pi$ dans le demi-plan P avec $\alpha_u + \alpha_v < \pi$. D'après

les propriétés de linéarité et de translation vues aux paragraphes précédents, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (u(n) - u(n+1)) v(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} u(n+1) (v(n+1) - v(n)) + u(1) v(1) - \int_1^2 u(t) v(t) dt. \end{aligned}$$

Cette formule est pour la sommation de Ramanujan l'analogue de la classique formule de sommation par parties d'Abel. En particulier en remplaçant u par R_a , on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) v(n) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} R_a(n+1) (v(n+1) - v(n)) + R_a(1) v(1) - \int_1^2 R_a(t) v(t) dt.$$

En remplaçant à présent v par R_b dans la formule précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) R_b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) R_a(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) - \int_1^2 R_a(t) R_b(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n b(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) + \int_1^2 R_a(t) R_b(t) dt. \end{aligned}$$

Cette dernière formule admet deux cas particuliers intéressants :

PROPOSITION 4.2.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n \partial a(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \partial a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) + \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = \partial a(x)$, et en utilisant la propriété de dérivation vue au §4.3, il vient :

$$\int_1^2 R_a(t) R_{\partial a}(t) dt = \int_1^2 R_a(t) \partial R_a(t) dt = \frac{1}{2} [R_a^2]_1^2 = \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \quad \square$$

PROPOSITION 4.3.

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial^{-1} a(n),$$

avec $\partial^{-1} a(x) = \int_1^x a(t) dt$.

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = 1$, on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) + \int_1^2 tR_a(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n).$$

Posons $A(x) = \int_1^x a(t) dt$. On a $\partial R_A = R_a$ de sorte que (en intégrant par parties)

$$\int_1^2 tR_a(t) dt = R_A(1).$$

La proposition en résulte. \square

EXEMPLE 10. (Sommes harmoniques : cf. [B1] pp. 251–253, [AV], [BB]).

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} H_n = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = \frac{3}{2} \gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi),$$

$$2 \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1 + \gamma^2 + \int_1^2 \psi^2(t) dt,$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \gamma \zeta(2),$$

avec :

$$H_n = \sum_1^n \frac{1}{k}.$$

REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t) dt = \zeta(2) \frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarithme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt = \gamma \zeta(2) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a , on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_a(2x) - R_a(2x+1) &= a(2x), \\ R_a(2x+1) - R_a(2(x+1)) &= a(2x+1). \end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a(2(x+1)) = a(2x) + a(2x+1).$$

On a donc :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (a(2n) + a(2n+1)) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. \square