

# 6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) = \ln(2) - 1,$$

où  $\sum^{\mathcal{B}}$  désigne la somme de Borel de la série.

## 6. INTERPOLATION DE NEWTON ET SOMMATION DE RAMANUJAN

Étant donnée une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ , il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction  $a$  telle que  $a(n) = a_n$  pour tout  $n \geq 1$ . On a la *formule d'interpolation de Newton* :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences  $n$ -ièmes :

$$\Delta^n a(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k a_{k+1}.$$

Du développement de Newton de  $a$  :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

on déduit formellement l'égalité :

$$\sum_{k \geq 1} a(k) = a(1) \sum_{k \geq 1} 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \sum_{k \geq 1} (k-1)(k-2)\dots(k-n).$$

Calculons à présent  $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n)$ . De l'équation aux différences :

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1) - x(x-1)\dots(x-n) = -(n+1)(x-1)\dots(x-n),$$

il découle que :

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = -\frac{1}{n+1} (x-1)(x-2)\dots(x-n-1) + I_{n+1}/(n+1),$$

avec :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x(x-1)\dots(x-n) dx.$$

On a donc :

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n) = \frac{I_{n+1}}{n+1},$$

et

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = I_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

De plus, les intégrales  $I_{n+1}$  sont données par la fonction génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} z^n = \frac{1}{\ln(1+z)} - \frac{1}{z}.$$

PROPOSITION 6.1. *Si  $a$  est une fonction analytique bornée dans le demi-plan  $P$ , alors :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

*Démonstration.* On commence par démontrer le

LEMME 6.1. *Si  $a$  est une fonction analytique bornée dans le demi-plan  $P$ , alors les  $\Delta^n a(1)$  forment une suite bornée.*

*Démonstration.* Par le théorème des résidus on a :

$$\Delta^n a(1) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{a(x)}{(x-1)\dots(x-(n+1))} dx,$$

où  $\gamma_n$  est le lacet entourant les points  $1, 2, \dots, n+1$  composé d'un segment vertical passant par le point  $\frac{1}{2}$  et du cercle de centre  $n+1$  et de rayon  $n+1$ . Sur le cercle, on a :

$$|(x-1)\dots(x-(n+1))| \geq (n+1)!,$$

et sur le segment, on a

$$|(x-1)\dots(x-(n+1))| \geq \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}.$$

La majoration de  $\Delta^n a(1)$  provient du fait que le cercle est de longueur  $2\pi(n+1)$  et que le segment est de longueur  $< 2\sqrt{n+1}$  ce qui permet de majorer l'intégrale sur le segment à l'aide de la formule de Stirling.  $\square$

La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$  est absolument convergente car les  $\Delta^n a(1)$  sont majorés par une constante et la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}$  est convergente (par un théorème taubérien classique). D'autre part, d'après des propriétés connues des séries de Newton (cf. [G]) la fonction :

$$x \mapsto - \sum_{n \geq 0} \frac{\Delta^n a(1)}{(n+1)!} (x-1)(x-2)\dots(x-(n+1)) + \sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$$

vérifie les trois propriétés caractéristiques de la fonction  $R_a$ .  $\square$

EXEMPLE 14. D'après le calcul de  $\Delta^n a$  pour  $a(x) = \frac{1}{x}$  :

$$\Delta^n a(x) = (-1)^n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

il vient :

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

Pour tout entier  $N \geq 2$ , on en déduit, d'après l'exemple 9 (cf. §4.2), l'égalité :

$$\gamma = 1 + \dots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{N(N+1)\dots(N+n)} \frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

REMARQUE 11. De la relation :

$$x^k = 1 + \sum_{n=1}^{n=k} S_k^n (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

avec :

$$S_k^n = \frac{1}{n!} \Delta^n x^k(1) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} C_n^p (p+1)^k,$$

on déduit, en prenant la somme de Ramanujan des deux membres, la relation :

$$\frac{1 - B_{k+1}}{k+1} = \sum_{n=0}^{n=k} S_k^n \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

REMARQUE 12. Le développement formel de  $R_a$  :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt - \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(x),$$

permet d'écrire formellement l'égalité :

$$R_a(1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = - \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(1).$$

En général, la série de droite diverge au sens de Cauchy. Cependant, on pourrait montrer que sous certaines hypothèses sur  $a$ , cette série est Borel-sommable et que

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = - \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{B}} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(1),$$

où  $\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{B}}$  désigne la somme de Borel. Par exemple :

$$\gamma = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^n \frac{B_n}{nN^n}.$$

D'autre part, on a vu (cf. proposition 6.1) que sous certaines hypothèses, on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1).$$

Remarquons que l'égalité formelle :

$$- \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n a(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$$

peut se déduire directement des développements formels :

$$\frac{I}{e^{\partial} - I} = \frac{I}{\partial} + \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \partial^n,$$

$$\frac{I}{\ln(I + \Delta)} = \frac{I}{\Delta} + \sum_{n \geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n,$$

ainsi que de la relation :

$$\partial = \ln E = \ln(I + \Delta).$$