6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{B}}(-1)^k\left(\zeta(k+1)-\frac{1}{k}\right)=\ln(2)-1\,,$$

où $\sum^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel de la série.

6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan

Étant donnée une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction a telle que $a(n)=a_n$ pour tout $n\geq 1$. On a la *formule d'interpolation de Newton*:

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n)\,.$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences n-ièmes:

$$\Delta^n a(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,C_n^k\,a_{k+1}\,.$$

Du développement de Newton de a :

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n)\,,$$

on déduit formellement l'égalité:

$$\sum_{k\geq 1}a(k)=a(1)\sum_{k\geq 1}1+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}\sum_{k\geq 1}(k-1)(k-2)\dots(k-n)\,.$$

Calculons à présent $\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}}(k-1)(k-2)\dots(k-n)$. De l'équation aux différences:

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)-x(x-1)\dots(x-n)=-(n+1)(x-1)\dots(x-n)\,,$$

il découle que:

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}=-\frac{1}{n+1}(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)+I_{n+1}/(n+1)\,,$$

avec:

$$I_{n+1}=\int_0^1 x(x-1)\dots(x-n)dx\,.$$

On a donc:

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}}(k-1)(k-2)\ldots(k-n)=\frac{I_{n+1}}{n+1},$$

et

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}}1=I_1=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\cdot$$

De plus, les intégrales I_{n+1} sont données par la fonction génératrice:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}z^n=\frac{1}{\ln(1+z)}-\frac{1}{z}\,.$$

PROPOSITION 6.1. *Si a est une fonction analytique bornée dans le demi-plan P, alors:*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}a(n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}\,\frac{I_{n+1}}{n+1}\,.$$

Démonstration. On commence par démontrer le

LEMME 6.1. *Si a est une fonction analytique bornée dans le demi-plan P, alors les $\Delta^n a(1)$ forment une suite bornée.*

Démonstration. Par le théorème des résidus on a:

$$\Delta^n a(1)=\frac{n!}{2i\pi}\int_{\gamma_n}\frac{a(x)}{(x-1)\ldots\big(x-(n+1)\big)}\,dx\,,$$

où γ_n est le lacet entourant les points $1,2,\ldots\,,n+1$ composé d'un segment vertical passant par le point $\frac{1}{2}$ et du cercle de centre $n+1$ et de rayon $n+1$. Sur le cercle, on a:

$$|(x-1)\ldots(x-(n+1)|\geq(n+1)!\,,$$

et sur le segment, on a

$$|(x-1)\ldots(x-(n+1))|\geq\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\cdot$$

La majoration de $\Delta^n a(1)$ provient du fait que le cercle est de longueur $2\pi(n+1)$ et que le segment est de longueur $<2\sqrt{n+1}$ ce qui permet de majorer l'intégrale sur le segment à l'aide de la formule de Stirling. $\square$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$ est absolument convergente car les $\Delta^n a(1)$ sont majorés par une constante et la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente (par un théorème taubérien classique). D'autre part, d'après des propriétés connues des séries de Newton (cf. [G]) la fonction :

$$x \mapsto -\sum_{n\geq 0} \frac{\Delta^n a(1)}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\dots\big(x-(n+1)\big) + \sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \Delta^n a(1)$$

vérifie les trois propriétés caractéristiques de la fonction R_a. □

EXEMPLE 14. D'après le calcul de $\Delta^n a$ pour $a(x) = \frac{1}{x}$:

$$\Delta^n a(x) = (-1)^n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

il vient :

$$\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

Pour tout entier $N \geq 2$, on en déduit, d'après l'exemple 9 (cf. §4.2), l'égalité :

$$\gamma = 1 + \dots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{N(N+1)\dots(N+n)} \frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

REMARQUE 11. De la relation :

$$x^k = 1 + \sum_{n=1}^{n=k} S_k^n (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

avec :

$$S_k^n = \frac{1}{n!}\Delta^n x^k(1) = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p} C_n^p (p+1)^k,$$

on déduit, en prenant la somme de Ramanujan des deux membres, la relation :

$$\frac{1-B_{k+1}}{k+1} = \sum_{n=0}^{n=k} S_k^n \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

REMARQUE 12. Le développement formel de R_a :

$$R_a(x) = -\int_1^x a(t)dt - \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(x)\,,$$

permet d'écrire formellement l'égalité :

$$R_a(1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = -\sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(1)\,.$$

En général, la série de droite diverge au sens de Cauchy. Cependant, on pourrait montrer que sous certaines hypothèses sur a, cette série est Borel-sommable et que

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = -\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{B}} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(1)\,,$$

où $\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel. Par exemple :

$$\gamma = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^n \frac{B_n}{nN^n}\,.$$

D'autre part, on a vu (cf. proposition 6.1) que sous certaines hypothèses, on a :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\, \Delta^n a(1)\,.$$

Remarquons que l'égalité formelle :

$$-\sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\, \Delta^n a(1)$$

peut se déduire directement des développements formels :

$$\frac{I}{e^{\partial} - I} = \frac{I}{\partial} + \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n\,,$$

$$\frac{I}{\ln(I+\Delta)} = \frac{I}{\Delta} + \sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\, \Delta^n\,,$$

ainsi que de la relation :

$$\partial = \ln E = \ln(I + \Delta)\,.$$