7.2. Transformation de Borel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

7. Appendice : Transformation de Laplace-Borel

Dans cet appendice, on donne une présentation de la transformation de Laplace-Borel bien adaptée au cadre de cet article. Pour un exposé plus systématique, le lecteur pourra se référer par exemple à [M].

7.1. Notations

Soit U un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture $\geq \pi$ du plan $\mathbf{C}$ de la variable complexe x. Nous désignons par $\mathcal{O}(U)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans l'ouvert U du plan complexe.

Nous dirons que $a \in \mathcal{O}(U)$ est de *type exponentiel* $r \geq 0$ *dans* U si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout demi-plan fermé $S \in U$ il existe une constante $C = C(S, \epsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait la majoration :

$$|a(x)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|}.$$

L'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{O}(U)$ de type exponentiel $r \geq 0$ dans U forme un espace vectoriel que nous noterons $\mathcal{O}(U)^{\exp(r)}$. L'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{O}(U)$ de type exponentiel quelconque forme quant à lui une algèbre que l'on note $\mathcal{O}(U)^{\exp}$.

7.2. Transformation de Borel

7.2.1. *Transformée de Borel*

Soit P l'ouvert du plan complexe défini par $P := \{x \mid \Re(x) > 0\}$. Considérons l'application analytique $x \mapsto a(x)$ que l'on suppose appartenir à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ $(r \geq 0)$. Soit dans ces conditions d une demi-droite (orientée vers l'infini) dans l'ouvert P. On définit la *transformée de Borel* $\mathcal{B}_d$ associée à d par :

$$\mathcal{B}_d(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_d e^{x\xi} a(x)\,dx.$$

Pour fixer les idées, on notera k l'origine de la demi-droite d'intégration et l'on supposera que $k \in]0, 1]$. On identifiera la direction à l'infini de cette demi-droite $d = d(\theta)$ via son angle polaire θ, $|\theta| \leq \pi/2$. La transformée de Borel $\mathcal{B}_d(a)$ s'écrit alors

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{d(\theta)} e^{x\xi} a(x)\,dx = -\frac{1}{2i\pi}e^{k\xi}\int_0^{+\infty} e^{te^{i\theta}\xi}\, a(k + te^{i\theta})\, e^{i\theta}\,dt.$$

La condition de convergence de cette intégrale découle de notre hypothèse sur a : on sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\epsilon, k) > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$ et tout $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$

$$\left|a(k + te^{i\theta})\right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)\left|k+te^{i\theta}\right|},$$

de sorte que

$$\left|e^{te^{i\theta}\xi}a(k + te^{i\theta})e^{i\theta}\right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)k}\, e^{(\Re(e^{i\theta}\xi)+r+\epsilon)t}\, e^{-\epsilon t/2}.$$

On en déduit que la condition

$$\Re(e^{i\theta}\xi) \leq -(r + \epsilon)$$

fournit une majoration uniforme en ξ de l'intégrant par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous montre donc que $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan ouvert:

$$U_r(\theta) = \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}.$$

La décomposition précédente nous fournit également sans peine une estimation sur la croissance à l'infini de $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$: notons S' un demi-plan fermé contenu dans l'ouvert $U_r(\theta)$. Nous pouvons supposer que pour $\epsilon > 0$ assez petit ce demi-plan fermé S' est contenu dans le domaine des ξ tels que la condition

$$\Re(e^{i\theta}\xi) \leq -(r + \epsilon)$$

soit satisfaite. Dans ces conditions, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\left|e^{te^{i\theta}\xi}a(k + te^{i\theta})e^{i\theta}\right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)k}e^{-\epsilon t/2},$$

et par conséquent pour tout $\xi \in S'$,

$$|\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)| \leq \frac{Ce^{(r+\epsilon/2)k}}{\epsilon\pi}e^{k|\xi|}.$$

De là découle que $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$ admet une croissance de type exponentiel k dans $U_r(\theta)$.

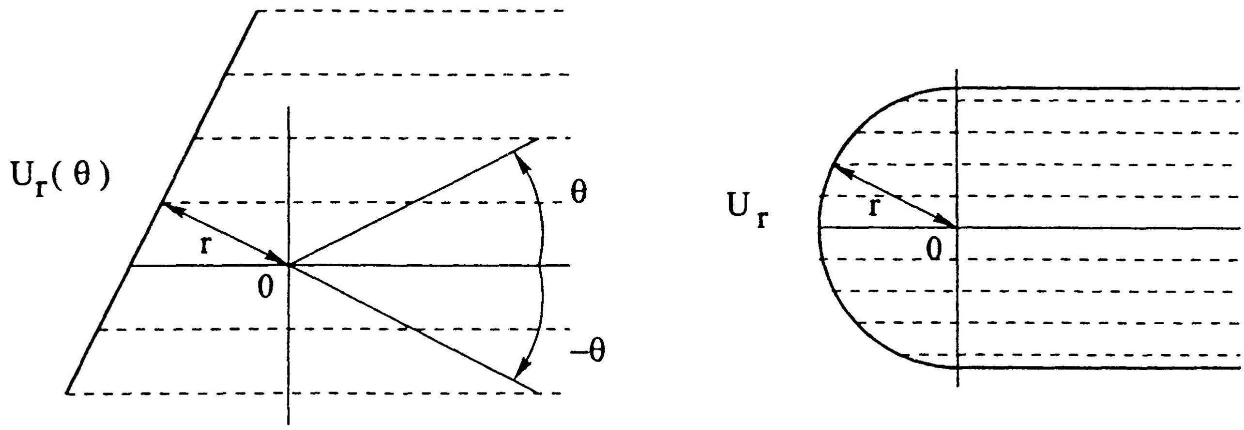

FIGURE 1

En faisant varier θ dans l'intervalle fermé $[-\pi/2, +\pi/2]$ et en application du théorème de Cauchy, la transformée de Borel se prolonge analytiquement en une fonction $\mathcal{B}_k(a)$ qui est analytique dans l'ouvert

$$U_r := \bigcup_{\theta\in[-\pi/2,+\pi/2]} U_r(\theta)$$

du plan complexe $\mathbf{C}$ que l'on a représenté sur la figure 1. Remarquons d'ailleurs que *la constante C intervenant dans les majorations précédentes peut être choisie de façon indépendante du choix de l'angle polaire* $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$. On en déduit que la transformée de Borel $\mathcal{B}_k(a)$ est de type exponentiel k à l'infini, autrement dit on a le

LEMME 7.1. *Si $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ alors $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$.*

Notons à présent que le changement d'origine $k \to k'$ de d se traduit par:

$$\mathcal{B}_{k'}(a) = \mathcal{B}_k(a) + h(a)_{k,k'} \,,$$

avec $h(a)_{k,k'} \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp(\tau)}$ où $\tau = \operatorname{Sup}(k, k')$. Ceci nous amène à poser la définition suivante:

DÉFINITION 2. Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction analytique appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$. La transformée de Borel de a, notée $\mathcal{B}(a)$, est une fonction analytique définie dans l'ouvert U_r qui coïncide dans cet ouvert avec l'une des fonctions $\mathcal{B}_k(a)$ *modulo* l'addition d'un élément de l'algèbre $\mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$.

7.2.2. *Dépendance suivant un paramètre*

Les propriétés précédentes de la transformée de Borel se transposent au cas où a dépend d'un paramètre de la façon suivante.

DÉFINITION 3. Soit D un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On notera $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$ l'espace vectoriel des fonctions $a : (x, z) \mapsto a(x, z)$ holomorphes dans l'ouvert $P \times D$ telles que: pour tout demi-plan fermé S contenu dans l'ouvert P, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_a = C_a(S, K, \epsilon) > 0$ tel que pour tout $x \in S$ on ait la majoration (uniforme en z):

$$|a(x, z)| \leq C_a e^{(r+\epsilon)|x|} \,.$$

LEMME 7.2. *On suppose que a appartient à l'espace* $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$. *Alors* $\mathcal{B}_k(a)$ *définit une fonction holomorphe dans l'ouvert* $U_r \times D$ *; de plus pour tout fermé* S' *contenu dans l'ouvert* U_r*, pour tout compact* $K \subset D$ *et pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $C = C(S', K, \epsilon) > 0$ *tel que pour tout* $\xi \in S'$ *on ait la majoration (uniforme en* z*) :*

$$|\mathcal{B}_k(a)(\xi, z)| \leq Ce^{(k+\epsilon)|\xi|}.$$

Autrement dit, $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$.

De plus si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}}\mathcal{B}_k(a) = \mathcal{B}_k\left(\frac{\partial}{\partial_{z_i}}a\right)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.1 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

7.3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

7.3.1. *Transformée de Laplace*

DÉFINITION 4. Soit $k \geq 0$ et $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$, où U_r est le voisinage sectoriel introduit précédemment. On définit la transformée de Laplace de f par :

$$\mathcal{L}f(x) = \int_\gamma e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

où γ est le chemin représenté sur la figure 2.

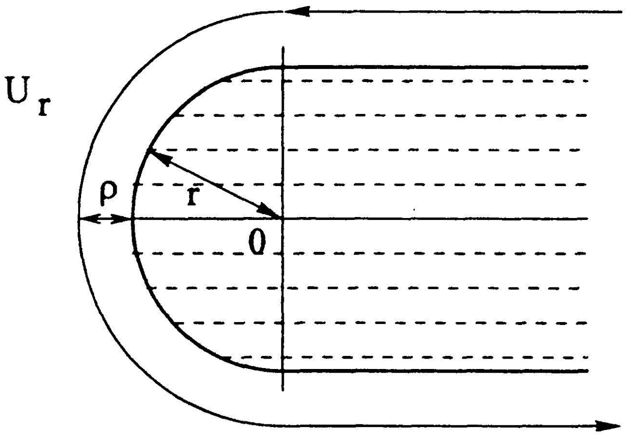

FIGURE 2

Remarquons tout de suite que l'hypothèse de croissance faite sur $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ implique (en utilisant les mêmes arguments qu'à la sous-