# 7.3. Transformation de Laplace

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

LEMME 7.2. *On suppose que $a$ appartient à l'espace $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$. Alors $\mathcal{B}_k(a)$ définit une fonction holomorphe dans l'ouvert $U_r \times D$ ; de plus pour tout fermé $S'$ contenu dans l'ouvert $U_r$, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C = C(S', K, \epsilon) > 0$ tel que pour tout $\xi \in S'$ on ait la majoration (uniforme en $z$):*

$$|\mathcal{B}_k(a)(\xi, z)| \leq Ce^{(k+\epsilon)|\xi|} .$$

*Autrement dit, $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$.*

*De plus si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}}\mathcal{B}_k(a) = \mathcal{B}_k\left(\frac{\partial}{\partial_{z_i}}a\right)$.*

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.1 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

## 7.3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

### 7.3.1. *Transformée de Laplace*

DÉFINITION 4. Soit $k \geq 0$ et $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$, où $U_r$ est le voisinage sectoriel introduit précédemment. On définit la transformée de Laplace de $f$ par :

$$\mathcal{L}f(x) = \int_\gamma e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi ,$$

où $\gamma$ est le chemin représenté sur la figure 2.

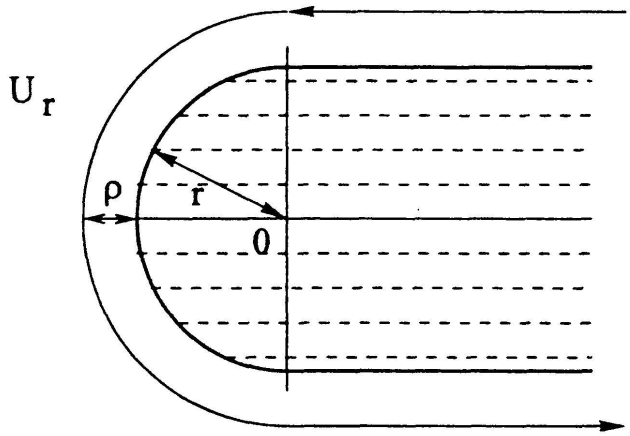


FIGURE 2

Remarquons tout de suite que l'hypothèse de croissance faite sur $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ implique (en utilisant les mêmes arguments qu'à la sous-section précédente) l'analyticité de $\mathcal{L}f$ dans l'ouvert $P_k$ du plan complexe des $x$, voisinage sectoriel de l'infini défini par

$$P_k := \{x \in \mathbf{C} \mid \Re(x) > k\}.$$

L'étude sur sa croissance à l'infini est l'objet du lemme suivant :

LEMME 7.3. *Si $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ alors la fonction $\mathcal{L}f$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P_k)^{\exp(r)}$.*

*Démonstration.* Pour montrer que $\mathcal{L}f$ est de type exponentiel dans l'ouvert $P_k$, considérons un demi-plan fermé $S$ contenu dans cet ouvert : pour $\epsilon > 0$ assez petit nous pouvons supposer que le secteur fermé $S$ est inclus dans le domaine des $x$ tels que la condition

$$\Re(x) \geq (k + \epsilon)$$

soit satisfaite. En utilisant notre liberté de déformation du chemin $\gamma$ à l'aide d'une homotopie laissant invariantes les directions à l'infini nous pouvons aussi supposer que $\gamma$ s'écrit comme la somme :

- du chemin compact orienté $C(r+\rho)$ consistant à parcourir le demi-cercle situé dans le domaine $\Re(\xi) \leq 0$, de rayon $\alpha + \rho$, où $\rho$ est un réel positif que l'on peut prendre *aussi petit* que l'on veut ;
- de la réunion de deux demi-droites orientées $\gamma(r+\rho)$ et $\overline{\gamma(r+\rho)}$, demi-droites horizontales dont la première est d'extrémité $i(r+\rho)$ et la seconde d'origine $-i(r+\rho)$.

Considérons l'intégrale sur $\gamma(r+\rho)$,

$$\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi = e^{-ix(r+\rho)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f\big(t + i(r+\rho)\big)\, dt\,.$$

Suivant notre hypothèse sur $f$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, on ait :

$$\big|f\big(t + i(r+\rho)\big)\big| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}\, e^{-\epsilon t/2}\, e^{(k+\epsilon)t}\,,$$

de sorte que pour tout $x \in S$,

$$\big|e^{-xt} f\big(t + i(r+\varepsilon)\big)\big| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}\, e^{-\epsilon t/2}\,,$$

et par conséquent pour tout $x \in S$,

$$\left|\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \frac{2Ce^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}}{\epsilon}\, e^{(r+\rho)|x|}\,.$$

L'intégrale sur $\overline{\gamma(r+\rho)}$ se traite de la même façon, avec une conclusion identique. En ce qui concerne l'intégrale sur le chemin compact $C(r+\rho)$, il suffit de majorer le module de $f$ par une constante (par compacité) pour conclure. □

### 7.3.2. *Dépendance suivant un paramètre*

La transformation de Laplace « à paramètre » ne pose pas de difficulté particulière : avec les notations de la sous-section précédente énonçons le

LEMME 7.4. *Si $f \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$ où $D$ un ouvert de $\mathbf{C}^n$, la fonction $\mathcal{L}f$ définit une fonction holomorphe dans l'ouvert $P_k \times D$ ; de plus pour tout demi-plan fermé $S \subset P_k$, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C = C(S, K, \epsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait la majoration (uniforme en $z$) :*

$$|\mathcal{L}f(x,z)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|},$$

*autrement dit : $\mathcal{L}f \in \mathcal{O}_D(P_k)^{\exp(r)}$.*

*De plus si $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}}\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\big(\frac{\partial}{\partial_{z_i}}f\big)$.*

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.3 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

### 7.3.3. *La transformation de Laplace-Borel*

Le lemme qui suit est une simple remarque.

LEMME 7.5. *Si $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$, on a $\mathcal{L}f = 0$.*

Mais cela nous permet de définir sans ambiguïté la transformée de Laplace $\mathcal{LB}(a)$ de la transformée de Borel d'un élément $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ : pour tout $k > 0$,

$$\mathcal{LB}(a) := \mathcal{LB}_k(a).$$

Par conséquent, $\mathcal{LB}(a)$ définit une fonction analytique dans l'ouvert $P$ (faire tendre $k$ vers $0$). Plus précisément :

THÉORÈME 2. *Soit* $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$. *Alors*

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big) = a$$

*dans l'ouvert* $P$.

*Démonstration.* Soit $x \in S$ où $S$ est le secteur fermé de l'ouvert $P$ représenté sur la figure 3. D'après les définitions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ on a:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = \int_\gamma e^{-x\xi}\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi$$

où $\mathcal{B}(a)(\xi)$ est défini par:

$$B(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+} e^{y\xi}\,a(y)\,dy$$

si $\xi$ est sur $\gamma_+$, et par:

$$B(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d-} e^{y\xi}\,a(y)\,dy$$

si $\xi$ est sur $\gamma_-$, où les chemins $d_+$ , $d_-$ , $\gamma_+$ et $\gamma_-$ sont représentés sur la figure 3. On a donc:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = \int_{\gamma+} e^{-x\xi}\frac{-1}{2i\pi}\int_{d+} e^{y\xi}\,a(y)\,dyd\xi + \int_{\gamma-} e^{-x\xi}\frac{-1}{2i\pi}\int_{d-} e^{y\xi}\,a(y)\,dyd\xi\,.$$

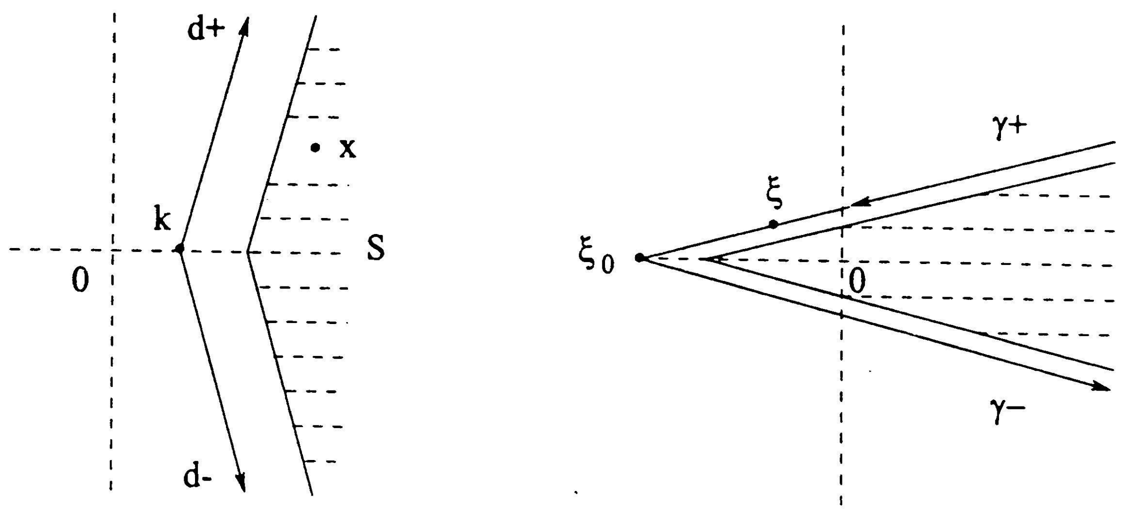


FIGURE 3

Cela donne en permutant l'ordre d'intégration:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+}\int_{\gamma+} e^{(y-x)\xi}\,d\xi a(y)\,dy - \frac{1}{2i\pi}\int_{d-}\int_{\gamma-} e^{(y-x)\xi}\,d\xi a(y)\,dy\,.$$

En intégrant $\xi \to e^{(y-x)\xi}$ le long de $\gamma_+$ et de $\gamma_-$, on obtient:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x}\, a(y)\, dy + \frac{1}{2i\pi}\int_{d-} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x}\, a(y)\, dy\,.$$

Si $C_R$ désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy:

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x}\, a(y)\, dy\,.$$

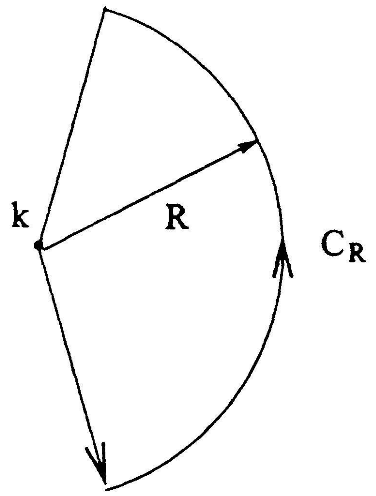


FIGURE 4

En faisant tendre $R$ vers l'infini on voit que $\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = a(x)$ pour tout $x \in S$. $\square$

### 7.4. LE CAS INTÉGRABLE

Supposons que la fonction $a$ appartienne à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$ $(r \geq 0)$ où $V_\beta$ désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C}\backslash\{0\} \mid -\beta < Arg(x) < \beta\}\,,$$

avec $\pi/2 < \beta < \pi$.

Reprenons les notations de la sous-section 7.2; en particulier $U_r(\theta)$ désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}\,.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant $\mathcal{B}_k(a)$ de la transformée de Borel de $a$ se prolonge analytiquement: