

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES ORIGINES DU CALCUL SYMPLECTIQUE CHEZ LAGRANGE  
**Autor:** IGLESIAS, Patrick  
**Kapitel:** Conclusion  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63904>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Considérons alors une feuille du feuilletage  $y \mapsto \mathbf{R} \cdot \xi$  passant par  $y = (t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Cette courbe se projette sur l'espace des mouvements képlériens  $\mathcal{K}$ , son équation est alors :

$$(46) \quad \frac{dm}{dt} = D\pi_y(\xi) = D\pi_y(\xi_0) + D\pi_y(\chi),$$

où  $\pi: y \mapsto m$  est la projection de  $Y$  sur son quotient et  $D$  désigne l'application linéaire tangente. Or, par construction :  $D\pi_y(\xi_0) = 0$ , il reste donc  $dm/dt = D\pi_y(\chi)$ . Un petit dessin vaut parfois mieux qu'un long discours, voir figure 3. C'est la famille d'équations (15). Enfin, transformée en la famille d'équations (21), elle s'écrit encore :

$$(47) \quad \frac{dm}{dt} = \omega^{-1}(d\Omega),$$

où  $d\Omega$  désigne la différentielle de  $\Omega$ . Par analogie avec le cas euclidien, comme  $\omega$  est inversible, on appelle *gradient symplectique* de la fonction  $\Omega$  le champ de vecteurs  $\omega^{-1}(d\Omega)$ . L'équation différentielle qui décrit la variation des constantes devient après ces conventions de langage :

$$(48) \quad \frac{dm}{dt} = \text{grad}(\Omega).$$

L'évolution du mouvement  $m$ , perturbé par le potentiel  $\Omega$ , est donc la courbe intégrale du gradient symplectique du potentiel de perturbation.

## CONCLUSION

La partie la plus douteuse du travail de Lagrange concerne sûrement la méthode d'approximation utilisée. Je voudrais à ce propos souligner qu'hormis ces méthodes d'approximation les conclusions de Lagrange sont rigoureusement établies même si la présentation qu'il en a faite, et que j'ai essayé de reproduire ici, ne respecte pas les canons actuels de la mathématique. En ce sens, les transformations qu'il apporte aux équations initiales ne sont pas d'une grande utilité puisque celles qu'il obtient leur sont absolument équivalentes. Laissons-le parler :

« Ainsi on peut regarder les équations précédentes entre les nouvelles variables  $a, b, c$ , etc. comme les transformées des équations en  $x, y, z$  ; mais ces transformations seraient peu utiles pour la solution générale du problème. Leur grande utilité est lorsque la solution rigoureuse est impossible, et que les forces perturbatrices sont très petites ; elles fournissent alors un moyen d'approximation. »

Mais la justification de ces méthodes emploiera un grand nombre de mathématiciens après lui et non des moindres. Poincaré soulignait dans l'introduction de sa célèbre *Nouvelle mécanique céleste* [Poi92]:

« Ces méthodes qui consistent à développer les coordonnées des astres suivant les puissances des masses, ont en effet un caractère commun qui s'oppose à leur emploi pour le calcul des éphémérides à longue échéance. Les séries obtenues contiennent des termes dits *séculaires*, où le temps sort des signes des sinus et cosinus, et il en résulte que leur convergence pourrait devenir douteuse si l'on donnait à ce temps  $t$  une grande valeur.

La présence de ces termes séculaires ne tient pas à la nature du problème, mais seulement à la méthode employée. Il est facile de se rendre compte, en effet, que si la véritable expression d'une coordonnée contient un terme en  $\sin \alpha m t$ ,  $\alpha$  étant une constante et  $m$  l'une des masses, on trouvera quand on voudra développer suivant les puissances de  $m$ , des termes séculaires  $\alpha m t - \alpha^3 m^3 t^3 / 6 + \dots$  et la présence de ces termes donnerait une idée très fautive de la véritable forme de la fonction étudiée. »

Cette objection est sans nul doute très pertinente et a conduit, notamment grâce aux travaux de Poincaré, au développement de la géométrie symplectique – en particulier en ce qui concerne son application à la mécanique. De nouvelles théories sont nées comme par exemple la théorie des systèmes complètement intégrables et de leur perturbation qui a donné le fameux théorème<sup>21)</sup> de Kolmogorov – Arnold – Moser, sur la stabilité de nombreux mouvements après perturbation (voir [Arn76] [Arn80]).

## RÉFÉRENCES

- [Arn76] ARNOLD, V. I. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions MIR (Moscou), 1976.
- [Arn80] ——— *Chapitres supplémentaires à la théorie des équations différentielles*. Éditions MIR (Moscou), 1980.
- [dG87] DE GANDT, F. Force et géométrie. Thèse de doctorat (Paris I), 1987.
- [Lag74] LAGRANGE, J.-L. Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, page 5. Gauthier-Villars, Paris, 1877. *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, année 1774.
- [Lag75] ——— Recherches sur les suites récurrentes. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, page 151. Gauthier-Villars, Paris, 1877. *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, année 1775.

<sup>21)</sup> Théorème difficile.