

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE  
**Autor:** Colin de Verdière, Yves  
**Kapitel:** 2.2 Variétés lagrangiennes et fonctions génératrices  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63894>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Une telle solution généralisée est simplement une variété lagrangienne de  $T^*X$  contenue dans  $H = 0$ .

On voit facilement que le champ  $\mathcal{X}_H$  est tangent à une telle variété. Bien sûr, en général, il y a des caustiques (enveloppe des trajectoires).

Une autre notion importante attachée à une sous-variété lagrangienne  $L$  de  $T^*X$  est celle de fronts d'ondes : ce sont les feuilles du feuilletage défini par la restriction à  $L$  de la 1-forme de Liouville  $\alpha = \xi dx$ . Leurs projections sur  $X$  sont aussi appelées fronts d'ondes.

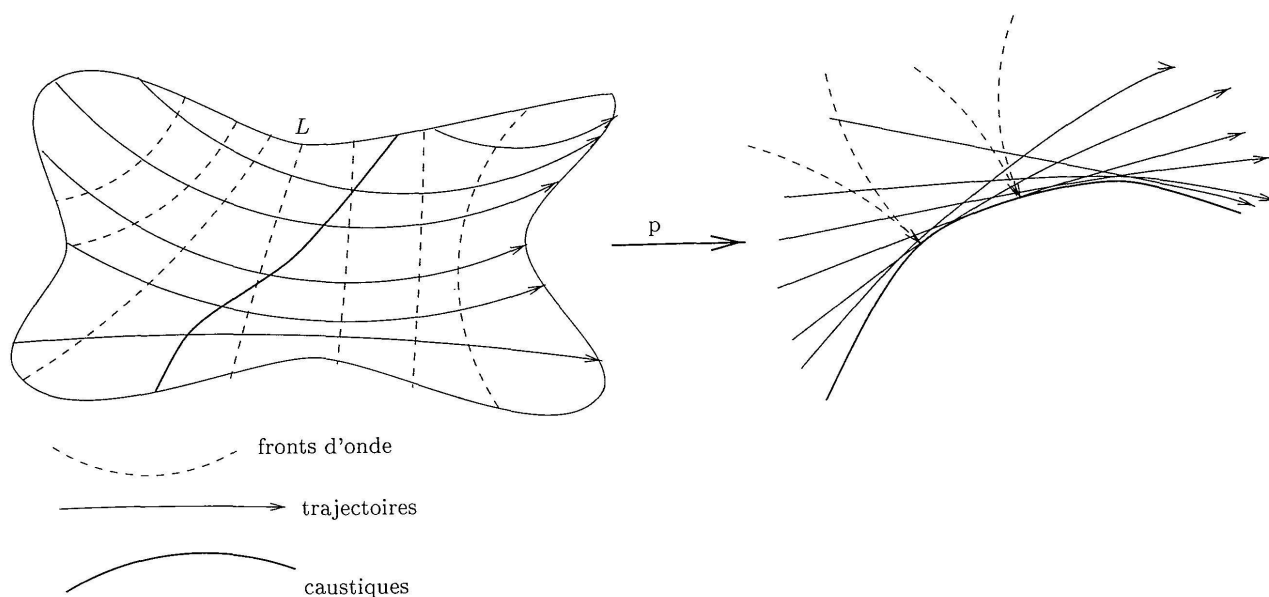


FIGURE 2

Variété lagrangienne et fronts d'ondes

## 2.2 VARIÉTÉS LAGRANGIENNES ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Une variété lagrangienne a en général des caustiques et ne peut donc pas être représentée par une fonction génératrice naïve. On a recours à une famille de fonctions  $\varphi(x, \theta)$ ,  $\theta \in \mathbf{R}^N$ . Si on considère les fronts d'ondes  $F_{\theta, a} = \{x \mid \varphi(x, \theta) = a\}$ , leur enveloppe est donnée classiquement comme l'ensemble des solutions de  $\varphi = a$ ,  $\partial_{\theta}\varphi = 0$ . A cette enveloppe est associée l'ensemble des  $(x, \partial_x\varphi)$  qui se trouve être, sous des hypothèses de non-dégénérescence, une variété lagrangienne. On retrouve une construction d'Huygens : l'enveloppe d'une famille de fronts d'ondes est un nouveau front d'onde.

C'est un théorème que toute variété lagrangienne admet une représentation de ce type. Une telle famille est du reste unique à des opérations élémentaires près : c'est un théorème dû à Hörmander.

La situation géométrique est celle d'une fibration  $F: E \rightarrow X$  et d'une fonction  $\varphi: E \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $L_0$  est le graphe de  $d\varphi$  contenu dans  $T^*E$ , on passe de  $L_0$  à  $L$  par la réduction symplectique associée au fibré conormal de la fibration.

En particulier, si  $\mathcal{L}: TX \rightarrow \mathbf{R}$  est un lagrangien régulier et  $\Omega_t$  l'ensemble des applications de  $\gamma: [0, t] \rightarrow X$  fibré sur  $X \times X$  par  $\gamma \rightarrow (\gamma(0), \gamma(t))$  et  $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s)) ds$ , la variété lagrangienne associée est le graphe du flot hamiltonien  $\varphi_t$  associé au lagrangien  $\mathcal{L}$  par la transformée de Legendre. La fonction génératrice  $\Phi$  est bien sûr reliée à l'intégrale de Feynman.

### 3. LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Pour cette section, voir [10], [32], [39], [47], [43].

Ici l'espace des phases est un espace de Hilbert (parfois de dimension finie); pour être plus précis, c'est le projectif complexe de cet espace, mais on peut négliger ce détail.

La dynamique est donnée au moyen d'un opérateur auto-adjoint  $\widehat{H}$  (avec domaine) sur  $\mathcal{H}$  grâce à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{du}{dt} = \widehat{H}u,$$

dont le flot est le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires donné par :  $U(t) = e^{-it\widehat{H}/\hbar}$ .

La constante  $\hbar$  n'est pas là uniquement pour faire joli, en général  $\widehat{H}$  est une énergie et donc  $\hbar$  a les dimensions d'une action, car on ne peut exponentier que des quantités sans dimension !!

EXEMPLE 3.1.  $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n)$  et  $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ . On a alors l'équation de Schrödinger.

EXEMPLE 3.2.  $\mathcal{H} = L^2(X)$  et  $\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_g$ , où  $\Delta_g$  est le laplacien riemannien. On a l'équation de Schrödinger associée au flot géodésique.

EXEMPLE 3.3. Si  $E$  est le fibré anti-canonique sur  $P^n\mathbf{C}$ , on considère l'espace de Hilbert des sections holomorphes de  $E^{\otimes N}$  qui s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré  $N$  sur  $\mathbf{C}^{n+1}$ .

Si  $H: P^n\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ , on considère les opérateurs de Toeplitz  $\widehat{H}_N\varphi = \Pi_N(H\varphi)$ , où  $\Pi_N$  est la projection orthogonale des sections sur les sections holomorphes. Voir [19].