Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE

Autor: Colin de Verdière, Yves

Kapitel: 2.2 Variétés lagrangiennes et fonctions génératrices

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

Une telle solution généralisée est simplement une variété lagrangienne de $T^\star X$ contenue dans $H = 0$.

On voit facilement que le champ $\mathcal{X}_H$ est tangent à une telle variété. Bien sûr, en général, il y a des caustiques (enveloppe des trajectoires).

Une autre notion importante attachée à une sous-variété lagrangienne L de $T^\star X$ est celle de fronts d'ondes : ce sont les feuilles du feuilletage défini par la restriction à L de la 1-forme de Liouville $\alpha = \xi dx$. Leurs projections sur X sont aussi appellées fronts d'ondes.

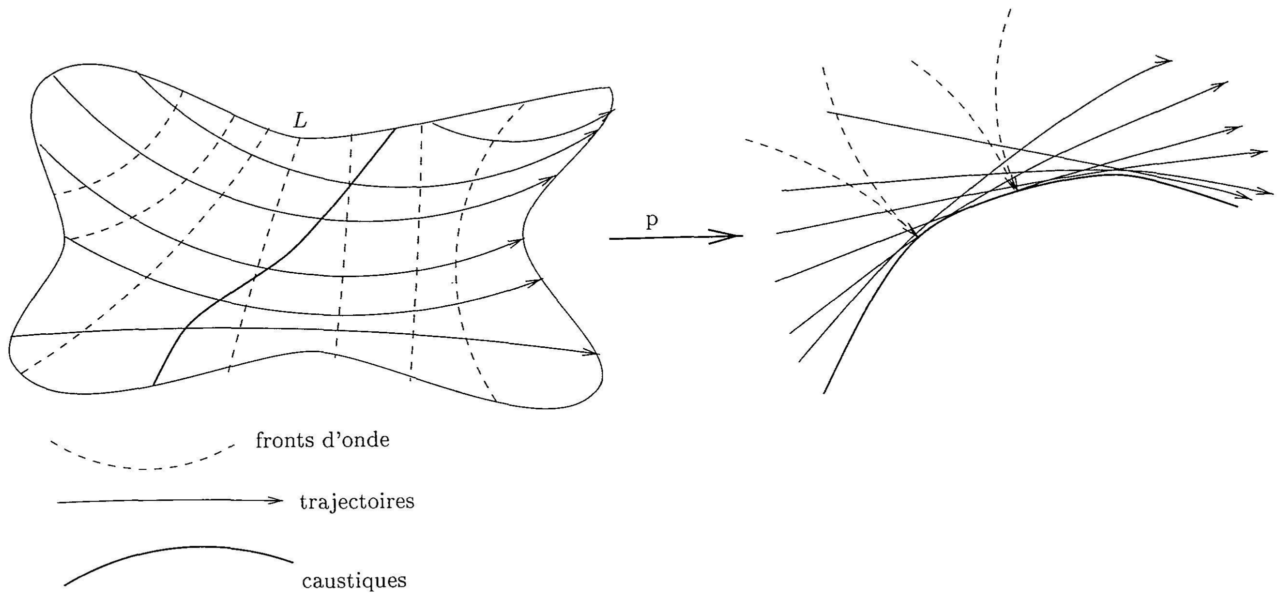

FIGURE 2

Variété lagrangienne et fronts d'ondes

2.2 Variétés lagrangiennes et fonctions génératrices

Une variété lagrangienne a en général des caustiques et ne peut donc pas être représentée par une fonction génératrice naïve. On a recours à une famille de fonctions $\varphi(x, \theta)$, $\theta \in \mathbf{R}^N$. Si on considère les fronts d'ondes $F_{\theta,a} = \{x \mid \varphi(x, \theta) = a\}$, leur enveloppe est donnée classiquement comme l'ensemble des solutions de $\varphi = a$, $\partial_\theta \varphi = 0$. A cette enveloppe est associée l'ensemble des $(x, \partial_x \varphi)$ qui se trouve être, sous des hypothèses de non-dégénérescence, une variété lagrangienne. On retrouve une construction d'Huygens : l'enveloppe d'une famille de fronts d'ondes est un nouveau front d'onde.

C'est un théorème que toute variété lagrangienne admet une représentation de ce type. Une telle famille est du reste unique à des opérations élémentaires près : c'est un théorème dû à Hörmander.

La situation géométrique est celle d'une fibration $F\colon E \to X$ et d'une fonction $\varphi\colon E \to \mathbf{R}$. Si L_0 est le graphe de $d\varphi$ contenu dans $T^\star E$, on passe de L_0 à L par la réduction symplectique associée au fibré conormal de la fibration.

En particulier, si $\mathcal{L}\colon TX \to \mathbf{R}$ est un lagrangien régulier et Ω_t l'ensemble des applications de $\gamma\colon [0,t] \to X$ fibré sur $X \times X$ par $\gamma \to (\gamma(0), \gamma(t))$ et $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s))ds$, la variété lagrangienne associée est le graphe du flot hamiltonien φ_t associé au lagrangien $\mathcal{L}$ par la transformée de Legendre. La fonction génératrice Φ est bien sûr reliée à l'intégrale de Feynman.

3. La mécanique quantique

Pour cette section, voir [10], [32], [39], [47], [43].

Ici l'espace des phases est un espace de Hilbert (parfois de dimension finie); pour être plus précis, c'est le projectif complexe de cet espace, mais on peut négliger ce détail.

La dynamique est donnée au moyen d'un opérateur auto-adjoint $\widehat{H}$ (avec domaine) sur $\mathcal{H}$ grâce à l'équation de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{du}{dt} = \widehat{H}u\,,$$

dont le flot est le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires donné par: $U(t) = e^{-it\widehat{H}/\hbar}$.

La constante $\hbar$ n'est pas là uniquement pour faire joli, en général $\widehat{H}$ est une énergie et donc $\hbar$ a les dimensions d'une action, car on ne peut exponentier que des quantités sans dimension !!

Exemple 3.1. *$\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n)$ et $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$. On a alors l'équation de Schrödinger.*

Exemple 3.2. *$\mathcal{H} = L^2(X)$ et $\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_g$, où Δ_g est le laplacien riemannien. On a l'équation de Schrödinger associée au flot géodésique.*

Exemple 3.3. *Si E est le fibré anti-canonique sur $P^n\mathbf{C}$, on considère l'espace de Hilbert des sections holomorphes de $E^{\otimes N}$ qui s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré N sur $\mathbf{C}^{n+1}$.*

Si $H\colon P^n\mathbf{C} \to \mathbf{R}$, on considère les opérateurs de Toeplitz $\widehat{H}_N\varphi = \Pi_N(H\varphi)$, où Π_N est la projection orthogonale des sections sur les sections holomorphes. Voir [19].